MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Al treilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 28 mai 2022

Problema 1.
Fie $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ numere reale cu proprietatea că

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = -3.$$

a) Dacă $a+b+c+d=6$, demonstrați că $d < 0,36$
b) Dacă $a^2+b^2+c^2+d^2 = 14$, arătați că $(a+c)(b+d) \leqslant 8$. Precizați cazurile de egalitate.

Problema 2.
Se consideră două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ tangente interior în punctul P (cercul $\mathcal{C}_2$ este interior cercului $\mathcal{C}_1$).
O coardă AB din cercul $\mathcal{C}_1$ este tangentă cercului $\mathcal{C}_2$ în punctul C. Fie D al doilea punct de intersecție dintre dreapta CP și cercul $\mathcal{C}_1$. O tangentă dusă din D la $\mathcal{C}_2$ intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}_1$ în E și cercul $\mathcal{C}_2$ în F.
Arătați că punctul F este centrul cercului înscris în triunghiul ABE.

Problema 3.
Fie p_i ($i \in \mathbb{N}^*$) al i-ulea număr prim (în ordine crescătoare). Pentru fiecare număr natural nenul k, notăm cu a_k numărul de numere naturale nenule i cu proprietatea că produsul $p_i p_{i+1}$ divide numărul k.
Dacă n este un număr natural nenul, arătați că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \frac{n}{3}.$$

Problema 4.
Fie $n \geqslant 2$ un număr natural și $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ (de n ori $\mathbb{N}$) mulțimea n-uplelor de numere naturale. Pentru fiecare $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ notăm cu d_a numărul perechilor (i, j), $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, pentru care $a_i - a_j = 1$.
Determinați valoarea maximă a numărului d_a când a parcurge mulțimea M.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.