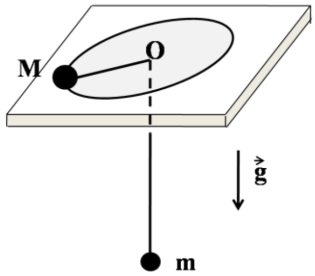
Olimpiada Naţională de Fizică
Vaslui 2015
Proba teoretică

XI

Problema I

A. Corpurile din figură sunt legate între ele printr-un fir inextensibil cu masa neglijabilă. Corpul cu masa M se rotește în plan orizontal, fără frecare, cu viteză unghiulară constantă, având perioada de rotație T_0. La celălalt capăt al firului se suspendă un corp de masă m care se poate mișca doar pe verticală în câmp gravitațional uniform, accelerația gravitațională fiind g.

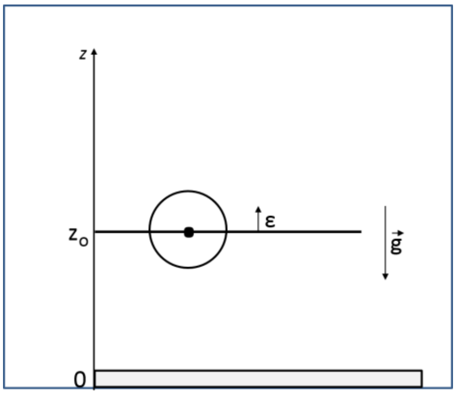


Arătați că mișcarea sistemului în situația dată este staționară și stabilă. **(1 p)**
Perturbând ușor sistemul (se deplasează corpul cu masa m pe verticală, pe o distanță mult mai mică decât raza cercului descris de către corpul cu masa M), determinați perioada micilor oscilații ale acestuia. **(3 p)**
Pentru ce valori ale raportului maselor sistemului, perioada oscilațiilor sistemului, T_{osc} este multiplu întreg al perioadei T_0 de rotație a sistemului la echilibru? **(1 p)**

Observația 1: Pentru caracterizarea mișcării de rotație a unui corp față de o axă se utilizează mărimea fizică vectorială $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$*, numită moment cinetic, sau moment al impulsului. Ecuația de mișcare a corpului se scrie* $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$*, unde* $\vec{M}$ *este momentul rezultant al forțelor care acționează asupra corpului în raport cu aceeași axă de rotație.*

Observația 2: Dacă este utilă se poate utiliza aproximația Bernoulli: $(1+x)^n \cong 1+nx$*, dacă* $x \ll 1$.

B. Un mic balon sferic ce are volumul V constant, conține o masă m de gaz ideal cu masa molară μ. Gazul din balon este permanent în echilibru termic cu aerul din încăpere. Considerăm masa balonului neglijabilă. Balonul se află, în echilibru mecanic, într-o încăpere în care temperatura aerului variază cu înălțimea, de la podea la plafon, după legea $\dfrac{dT}{dz} = c$, unde c este o constantă pozitivă. Balonul se află în echilibru la înălțimea z_0 a centrului balonului față de podea. Fie T_0 și ρ_0 temperatura și densitatea gazului la înălțimea de echilibru.



1. Presupunând că presiunea gazului din balon este uniformă, arată că la părăsirea poziției de echilibru balonul efectuează oscilații în jurul acestei poziții și determină pulsația ω_0 a acestuia. **(2 p)**
2. Considerând că presiunea aerului din încăpere variază cu altitudinea după legea: $p(z) = p_0 - \rho g (z - z_0)$, calculează noua pulsație a balonului ω. **(2 p)**

Variațiile de presiune și de temperatură sunt foarte mici față de valorile lor măsurate la nivelul de echilibru.

problemă propusă de
prof. Ion TOMA, CN Mihai Viteazul, București
prof. Ioan POP, CN Mihai Eminescu, Satu Mare

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerinţele.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Problema a II-a

I. Model pentru rezistență (3 p)

Un cilindru drept confecționat dintr-un material cu conductivitatea electrică σ_M are lungimea L și raza bazei R. În interiorul său se află un defect de forma unui cilindru dintr-un material cu conductivitatea electrică σ_D diferită de σ_M. Incluziunea cilindrică are lungimea b și raza bazei b. Ea este plasată la distanțe egale de capetele cilindrului care o include și este coaxială cu acest cilindru. Conductivitățile electrice ale materialului de bază și defectului sunt apropiate ca valoare. Se știe de asemenea că $L >> R >> b$. Cilindri pot fi considerați rezistențe electrice cu lungimea egală cu lungimea proprie și cu aria egală cu aria bazelor proprii.

a. Desenează o schemă echivalentă pentru rezistența electrică a cilindrului cu defect în interior. **(1 p)**

b. Dedu expresiile rezistențelor care compun schema electrică echivalentă, desenată la punctul a.**(0,5 p)**

Notează cu R_M rezistența unui cilindru cu caracteristicile L, R, σ_M fără defect. Notează cu R_D rezistența electrică a cilindrului cu caracteristicile L, R, σ_M, care conține defectul cilindric descris în enunț.

c. Dedu expresia diferenței dintre rezistențele electrice R_M și R_D.**(1,5 p)**

II. *Pendule de torsiune excitate electric (6p)*

A. Un pendul de torsiune este alcătuit dintr-un fir metalic elastic vertical având constanta de torsiune k și o bară orizontală cu lungimea $2R$, suspendată la mijlocul său de firul elastic. Pentru rotirea cu unghiul α a barei suspendate, trebuie aplicat asupra acesteia un moment al forței $M = k \cdot \alpha$. La capătul său superior firul este legat la pământ. Bara este construită din două segmente metalice având fiecare lungimea R separate printr-o porțiune dielectrică de lungime foarte mică . Bara este suspendată de fir în această porțiune, segmentele metalice nefiind inițial în contact electric cu firul. Barele au masă neglijabilă, iar la capetele lor libere sunt lipite două sfere metalice cu razele r mult mai mici decât R. Sferele sunt încărcate cu sarcinile electrice egale, q_0 și au mase egale, m. În problemă nu se ia în considerare efectul sarcinii electrice de pe segmentele metalice.

Pendulul este dispus într-un câmp magnetic uniform având modulul inducției B_0 și liniile de câmp verticale. La un moment dat, porțiunea dielectrică dintre segmentele conductoare este scurtcircuitată și barele intră simultan în contact electric cu firul de suspensie. Descărcarea sarcinii electrice a sferelor se face într-un timp mult mai scurt decât timpul în care mișcarea pendulului devine perceptibilă.

a. Determină viteza unghiulară ω_0 a pendulului imediat după scurtcircuitare. **(1,5 p)**

b. Dedu expresia $\alpha = \alpha(t)$ a legii de oscilație a pendulului de torsiune. **(1,5 p)**

B. Un pendul de torsiune este alcătuit dintr-un fir elastic vertical având constanta de torsiune k și o bară orizontală omogenă cu lungimea $2R$ suspendată la mijlocul său de firul elastic. Bara care este construită dintr-un material dielectric are masă neglijabilă. La capetele barelor sunt plasate două sfere metalice cu razele r, mult mai mici decât R. Fiecare sferă este încărcată cu sarcina electrică q. Pendulul este dispus într-un câmp magnetic uniform având inducția de modul B_0 și liniile de câmp verticale. La un moment dat modulul inducției câmpului magnetic începe să crească lent în timp după legea $B(t) = B_0 + b \cdot t$. Pentru orice moment al evoluției sistemului este adevărată relația $q_0 << 2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot b \cdot R$.

a. Determină legea de variație în timp a fluxului câmpului magnetic printr-o suprafață orizontală cu aria $S = \pi \cdot R^2$. **(1 p)**

b. Determină expresia deviației unghiulare α a pendulului de torsiune în cursul variației câmpului magnetic, ca funcție de mărimile $R, b, q_0, k, \varepsilon_0$. **(2 p)**

problemă propusă de
conf. univ. dr. Adrian DAFINEI, Facultatea de Fizică, Universitatea din București
prof. Ioan POP, CN Mihai Eminescu, Satu Mare

Problema a III-a

În practică, producerea undelor transversale într-o coardă se realizează prin tensionarea corzii și legarea ei la un sistem care oscilează pe direcția perpendiculară pe coardă. Acest sistem poartă numele de excitator.

a) Într-o astfel de coardă, cu lungimea foarte mare, se produc unde transversale progresive armonice plane care se propagă de-a lungul ei cu o viteză constantă (c). Să se determine unghiul format de tangenta la coardă într-un punct oarecare al ei și direcția de propagare a undei, la un moment oarecare, dacă viteza de oscilație a elementului de coardă din acel punct este v. **(1 p)**

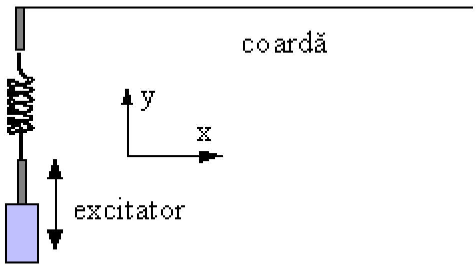
Coarda are masa unității de lungime μ și valoarea tensiunii este T. În coardă se produc unde transversale cu amplitudine mică.

b) Să se deducă expresia vitezei de propagare a undelor transversale, c, în funcție de T și μ. **(2 p)**

c) Mișcarea transversală a unui element oarecare al corzii se face sub acțiunea unei forțe proporționale cu viteza de oscilație a acelui element, coeficientul de proporționalitate, Z, purtând numele de impedanță elastică a corzii. Să se determine expresia impedanței corzii. **(1 p)**

d) O altă coardă, cu aria secțiunii transversale constantă, este compusă din trei regiuni suficient de lungi: una în care masa unității de lungime este μ_1, una în care masa unității de lungime este μ_2 și o regiune de trecere, în care masa unității de lungime nu este constantă, ci se modifică gradual de la μ_1 la μ_2. Lungimea porțiunii de coardă din această regiune este mult mai mare decât lungimea de undă a undei care se propagă prin ea, astfel încât fenomenul de reflexie a undei să nu se producă. Dacă amplitudinea undei este A_1 în regiunea corzii în care masa unității ei de lungime este μ_1, să se arate că amplitudinea A_2 a undei în regiunea corzii în care masa unității ei de lungime este μ_2 are expresia $A_2 = A_1\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\beta}$ și să se determine valoarea exponentului β. Se neglijează orice efect disipativ. **(2 p)**

e) În figura alăturată este reprezentată o coardă cu impedanța Z al cărei capăt liber este legat la un excitator prin intermediul unui resort cu constanta elastică K. Ecuația de mișcare a excitatorului este $y(t) = A\cos\omega t$, iar perturbația produsă de unda transversală în coardă are expresia $s(x,t) = B\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, B și φ_0 fiind necunoscute. La momentele în care $y = 0$ și resortul este relaxat, capătul corzii legat de resort ($x = 0$) este în poziția de echilibru ($s = 0$). Să se determine faza inițială φ_0 a perturbațiilor produse de unda transversală în coardă și amplitudinea B de oscilație a punctelor corzii. **(3 p)**



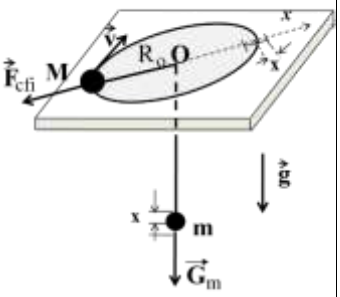
Observație: Intensitatea I a unei unde este mărimea fizică scalară, numeric egală cu valoarea medie în timp a energiei transferate de undă în unitatea de timp prin unitatea de suprafață orientată normal la direcția de propagare a undei, $I = \left\langle \frac{\Delta W}{\Delta t S} \right\rangle$.

problemă propusă de
conf. univ. dr. Sebastian POPESCU, Facultatea de Fizică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iași

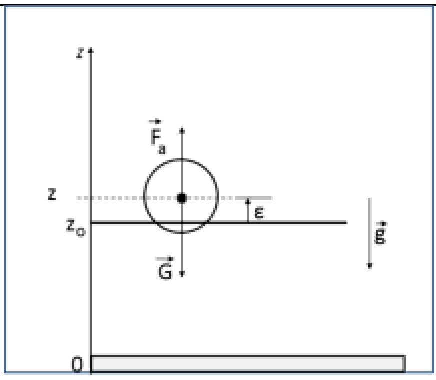
Olimpiada Națională de Fizică
Vaslui 2015
Proba teoretică - BAREM

XI

Problema I

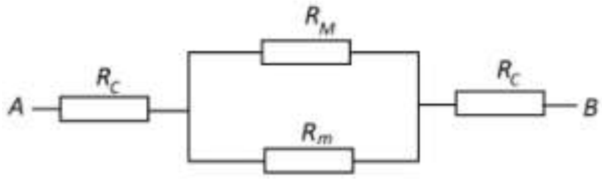
	punctaj parțial	punctaj total
Sistemul din figură este în stare de echilibru în timpul rotației, R_o fiind raza cercului descris de corpul cu masa M. Condiția de stabilitate a traiectoriei de mișcare a sistemului o determinăm considerând că, aplicând o forță sistemului de-a lungul verticalei, după încetarea acțiunii acesteia sistemul revine de la sine la starea inițială. Forța aplicată nu are moment  față de O ceea ce face ca de fiecare dată să se conserve momentul cinetic. $L_o = L_r\,, M\omega_o R_o^2 = M\omega(R_o \pm r)^2\,, \omega = \omega_o\left(\frac{R_o}{R_o \pm r}\right)^2$	0,5	
Vom calcula de fiecare dată $F_{revenire}$ a sistemului spre poziția de echilibru: $F_{revenire} = mg - F_{r,cfi}\,, \quad mg = F_{o,cfi} = M\omega_o^2 R_o$ $F_{revenire} = M\omega_o^2 R_o - M\omega^2(R_o \pm r) = M\omega_o^2 1R_o\left(1 - \frac{R_o}{R_o \pm r}\right)^3$	0,5	
Ce se poate observa este faptul ca forța rezultantă este totdeauna orientată spre poziția de echilibru ce coincide cu centrul de rotație, punctul O. Față de corpul cu masa M, $F_{o,cfi} - G_m = 0, \frac{Mv_o^2}{R_o} = mg,\ M\omega_o^2 R_o = mg$	0,5	1
Producând o mică perturbație asupra sistemului pe verticală în jos (acțiune asupra corpului de masă m) duce la o modificare (scădere) a razei de rotație a corpului M cu o cantitate x<< R_o. Ca urmare forța de revenire a sistemului spre poziția de echilibru va fi: $F_{revenire} = F_{x,cfi} - G_m\,, F_{revenire} = M\omega^2(R_o - x) - mg = M\omega^2(R_o - x) - M\omega_o^2 R_o.$	0,5	
Întrucât mișcarea se face în lungul razei de rotație forța perturbatoare nu are moment față de O cea ce face ca : $\frac{\Delta L}{\Delta t} = M_F = 0, \Delta L = 0, L_o = L.$ $Mv_o R_o = Mv(R_o - x), \omega_o R_o^2 = \omega(R_o - x)^2\,, \omega = \omega_o\left(\frac{R_o}{R_o - x}\right)^2$ Înlocuind obținem:	0,5	

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

$F_{revenire} = M\omega_o^2 \frac{R_o^4}{(R_o-x)^4}(R_o-x) - M\omega_o^2 R_o = M\omega_o^2 R_o\left[\left(\frac{R_o}{R_o-x}\right)^3 -1\right] = M\omega_o^2 R_o\left[\left(\frac{1}{1-\frac{x}{R_o}}\right)^3 -1\right]$	0,5	
Dezvoltând ecuația și ținând seama de condițiile impuse obținem forma finală a $F_{revenire} = M\omega_o^2 R_o\left[\left(1-\frac{x}{R_o}\right)^{-3} -1\right];\ M\omega_o^2 R_o\left(1+3\frac{x}{R_o}-1\right) = 3M\omega_o^2\ x$ $F_{revenire} = 3M\omega_o^2 x, \text{unde}: k_{ech} = 3M\omega_o^2$ $\omega_{osc}^2 = \frac{k_{ech}}{M+m} = \frac{3\omega_o^2}{1+\frac{m}{M}}$ Ținând seama de condiția de echilibru: $F_{cfi} - G_m = 0\ ,\ \omega_o^2 = \frac{mg}{MR_o}, \omega_{osc}^2\ \frac{3}{1+\frac{m}{M}} \square \frac{mg}{MR_o}\ ,\ T_{osc} = 2\pi\sqrt{\frac{R_o\left(1+\frac{M}{m}\right)}{3g}}$	0,5 0,5	3
$\frac{T_{osc}}{T_o} = n, \frac{\omega_o}{\omega_{osc}} = \frac{T_{osc}}{T_o} = n, n^2 = \frac{1+\frac{m}{M}}{3}, \frac{m}{M} = 3n^2 - 1$ $\frac{m}{M} \in \{2, 11, 26, ...\}$	**0,5** **0,5**	**1**
 1. $ma = F_a - mg,\ ma = \rho(z)gV - mg$ $F_{ao} = mg = \rho_o gV$ Pentru gazul din balon ecuația termică de stare este: $p = \frac{\rho}{\mu}RT$, iar $T = T_o + c(z - z_o)$	0,5	

$\rho(z)=\dfrac{p\mu}{R\left[T_o+c(z-z_o)\right]}=\dfrac{\rho_o}{1+\dfrac{c}{T_o}(z-z_o)}=\rho_o\left[1+\dfrac{c}{T_o}(z-z_o)\right]^{-1}$	0,5	
Ecuația de mișcare este: $ma=\rho(z)gV-\rho_o gV=\left[\rho(z)-\rho_o\right]gV$, $m=\rho_o V$, $\dfrac{c}{T_o}(z-z_o)<<1$		
$a=\dfrac{g}{\rho_o}\left[\rho(z)-\rho_o\right]=g\left[\dfrac{\rho(z)}{\rho_o}-1\right]$	0,5	2
$a=g\left\{\left[1+\dfrac{c}{T_o}(z-z_o)\right]^{-1}-1\right\};-g\dfrac{c}{T_o}(z-z_o)=-g\dfrac{c}{T_o}\varepsilon$	0,5	
$\omega_o^2=g\dfrac{c}{T_o}$, $\omega_o=\sqrt{g\dfrac{c}{T_o}}$		
2. Presiunea variază cu înălțimea : $p(z)=p_o-\rho g(z-z_o)$, $T=T_o+c(z-z_o)$		
Din ecuația termică de stare : $\rho(z)=\dfrac{p\mu}{RT}=\dfrac{p_o\mu}{RT_o}\dfrac{1-\dfrac{\rho g(z-z_o)}{p_o}}{1+\dfrac{c(z-z_o)}{T_o}}=\rho_o\left[1-\dfrac{\rho g(z-z_o)}{p_o}\right]\left[1+\dfrac{c(z-z_o)}{T_o}\right]^{-1}=\rho_o\left[1-\left(\dfrac{\rho g}{p_o}+\dfrac{c}{T_o}\right)(z-z_o)\right]$	1	
$a=-\omega^2\varepsilon$, $\omega^2=g\left(\dfrac{\rho g}{p_o}+\dfrac{c}{T_o}\right)\Rightarrow\omega=\sqrt{g\left(\dfrac{\rho g}{p_o}+\dfrac{c}{T_o}\right)}$	0,5	2
$\omega^2=\dfrac{\rho_o g^2}{p_o}+\dfrac{cg}{T_o}=\omega_o^2+\dfrac{g^2\mu}{RT_o}$, $\omega=\sqrt{\omega_o^2+\dfrac{g^2\mu}{RT_o}}$	0,5	
Oficiu		1

Problema II

<table>
<tr><th></th><th>punctaj parțial</th><th>punctaj total</th></tr>
<tr><td>I. a
Pentru modelarea situației se poate împărți mental cilindrul mare în trei porțiuni de asemenea cilindrice cu lungimile $((L-b)/2), b, ((L-b)/2)$.
Se poate imagina cilindrul reprezentând defectul ca fiind un rezistor ideal R_m dispus în paralel cu zona centrală „cu gaură” din cilindrul mare având aceeași lungimea b . Această porțiune din cilindrul mare are rezistența R_M . În serie cu acest ansamblu paralel , de o parte și de alta, se află rezistențele echivalente R_C ale porțiunilor dinspre capete din cilindrul mare.
Schema echivalentă este prezentată în figura alăturată.

</td><td>0,5

0,5 (expli-cațiile)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>I. b
Evident,
$$R_c = \frac{L-b}{2 \cdot \sigma_M \cdot \pi \cdot R^2}$$
$$R_m = \frac{b}{\sigma_D \cdot \pi \cdot b^2} = \frac{1}{\sigma_D \cdot \pi \cdot b}$$
$$R_M = \frac{b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot (R^2 - b^2)}$$</td><td>0,2

0,1

0,2</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>I. c
Rezistența echivalentă măsurată între capetele A și B ale circuitului echivalent are valoarea
$$R_D = R_C + \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_M}\right)^{-1} + R_C$$
Cu substituțiile necesare rezultă că
$$R_D = \frac{L-b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} + \left(\frac{\pi \cdot b^2 \cdot \sigma_D}{b} + \frac{\sigma_M \cdot \pi \cdot (R^2 - b^2)}{b}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{L-b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} + \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}$$
$$R_D = \frac{L \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)) - b \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M) - R^2 \cdot \sigma_M)}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M))}$$
$$R_D = \frac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} - \frac{b^3}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \frac{(\sigma_D - \sigma_M)}{R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}$$</td><td>0,3

0,3</td><td>1,5</td></tr>
</table>

Ținând seama de condițiile impuse din enunț ($L >> R >> b$) și cum $\sigma_D \approx \sigma_M$ relația de mai sus devine $R_D = \frac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} - \frac{b^3 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}{\sigma_M^2 \cdot \pi \cdot R^4}$ Rezistența cilindrului fără defect are evident valoarea $R_M = \frac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2}$ astfel că $\Delta R = R_M - R_D = \frac{b^3 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}{\sigma_M^2 \cdot \pi \cdot R^4}$	0,3 0,3 0,3	
II. A. a După scurtcircuitarea barelor metalice pentru fiecare dintre cele două sfere metalice apare pentru un interval de timp foarte scurt, mult mai scurt decât timpul în care mișcarea pendulului devine perceptibilă, un curent electric de descărcare a cărui valoarea instantanee este $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ Trecerea curentului prin segmentele metalice care leagă cele două sfere cu firul elastic determină apariția unei forțe electromagnetice. Pentru o porțiune de lungime dx dintr-unul dintre segmente forța determinată de trecerea curentului are expresia $dF = B_0 \cdot i(t) \cdot dx$ Dacă porțiunea dx din segmentul conductor se află la distanța x (cu $0 \le x \le R$) de firul de suspensie, momentul determinat de trecerea curentului prin porțiunea considerată are expresia $dM = B_0 \cdot i(t) \cdot x \cdot dx$ Momentul mecanic total determinat de acțiunea curentului de descărcare asupra uneia dintre bare are expresia $M = B_0 \cdot i(t) \cdot \frac{R^2}{2}$ Momentul mecanic determinat de cele două bare are expresia $M_T = B_0 \cdot i(t) \cdot R^2$ Momentul de inerție al barei cu sferele la capete este $J = 2m \cdot R^2$ și pentru o viteză unghiulară ω momentul cinetic are expresia $L = J \cdot \omega = 2m \cdot R^2 \cdot \omega$ (Se poate accepta și expresia identică obținută prin scrierea $\vec{L} = \vec{r} \times p$ unde $\vec{p}$ este impulsul fiecărei sfere.) Variația în timp a momentului cinetic are expresia $\frac{dL}{dt} = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = 2m \cdot R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}$	0,1 0,2 0,2 0,2 0,1 0,1	**1,5**

<table>
<tr><td>Acțiunea momentului asupra barei suspendate conduce la variația în timp a momentului său cinetic.
$\frac{dL}{dt}=M_T$
adică
$\frac{dL}{dt}=2m\cdot R^2\cdot\frac{d\omega}{dt}=M_T=B_0\cdot i(t)\cdot R^2=B_0\cdot\frac{dq}{dt}\cdot R^2$
În final,
$2m\cdot\frac{d\omega}{dt}=B_0\cdot\frac{dq}{dt}$
și considerând variațiile de sarcină și ale vitezei unghiulare pentru tot intervalul de timp în care s-a făcut descărcarea rezultă
$\Delta\omega=(\omega_0-0)=\frac{B_0}{2m}\cdot\Delta q=\frac{B_0}{2m}\cdot(0-q_0)$
și deci
$\omega_0=-q_0\cdot\frac{B_0}{2m}$</td><td>0,2

0,2

0,2</td><td></td></tr>
<tr><td>II. A. b
Pendulul de torsiune are ecuația de mișcare
$J\cdot\varepsilon=-k\cdot\alpha$
și cum pentru cazul dat $J=2m\cdot R^2$
ecuația de oscilație se poate scrie ca
$\ddot{\alpha}+\frac{k}{2m\cdot R^2}\cdot\alpha=0$
Soluția ecuației de oscilație este
$\alpha(t)=A\cdot\sin(\Omega\cdot t+\varphi)$
În expresie $\frac{k}{2m\cdot R^2}=\Omega^2$
Evident,
$\dot{\alpha}(t)=A\cdot\Omega\cdot\cos(\Omega\cdot t+\varphi)$
Condițiile inițiale pentru oscilator sunt
$\begin{cases}\alpha(0)=0\\ \dot{\alpha}(0)=\omega_0\end{cases}$
Rezultă că
$\begin{cases}\varphi=0\\ A=\frac{\omega_0}{\Omega}\end{cases}$
și prin urmare ecuația oscilației pendulului de torsiune este</td><td>0,3

0,3

0,3

0,15

0,15</td><td>1,5</td></tr>
</table>

$\alpha(t)=\omega_0\cdot R\cdot\sqrt{\frac{2m}{k}}\cdot\sin\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t\right)$ <u>Notă</u> Momentul forțelor care acționează asupra barelor se poate determina prin divizarea acestora în n segmente de lungime $\frac{R}{n}$ aflate la distanțe $i\cdot\frac{R}{n}$ cu ($(1<i<n)$ față de fir. Ulterior se sumează momentele elementare. Această rezolvare presupune cunoașterea formulei $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$	0,3	
II. B. a Fluxul magnetic definit ca $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$ are pentru situația din problemă expresia $\Phi=(B_0+b\cdot t)\cdot\pi\cdot R^2$ Variația câmpului magnetic conduce la apariția unui câmp electric care acționează asupra sarcinilor electrice de pe sfere. Se consideră un cerc de rază R dintr-un material conductor. Cercul este dispus într-un plan orizontal și are centrul pe firul pendulului de torsiune. Variația fluxului magnetic în acest cerc are expresia $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\left((B_0+b\cdot t)\cdot\pi\cdot R^2\right)}{dt}=\pi\cdot b\cdot R^2$	1	**1**
II. B. b Ca urmare a acestei variații a fluxului în conturul considerat apare tensiunea indusă u_{indus} care are expresia $u_{indus}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\pi\cdot b\cdot R^2$ În contur acționează prin urmare un câmp electric indus a cărui intensitate E_{indus} are expresia $E_{indus}=\frac{u_{indus}}{2\pi\cdot R}=-\frac{b\cdot R}{2}$ Acest câmp se manifestă pe curbe închise din spațiul în care există câmp magnetic variabil. Ținând seama de relația $q_0<<2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2\cdot b\cdot R$ dată în enunț rezultă că $\frac{b\cdot R}{2}>>\frac{q_0}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}$ Câmpul electric indus este mult mai mare decât cea mai mare valoare a câmpului electric generat de sferele încărcate $E_{indus}>>E(r)$ Câmpul electric generat de inducția electromagnetică nu este afectat de câmpul	0,3 0,4 0,2	**2**

electric al sferelor încărcate electric. Asupra fiecărei sfere încărcate cu sarcină electrică va acționa prin urmare forța electrică $F_{electric}$ având expresia $F_{electric} = E_{indus} \cdot q = \frac{b \cdot R}{2} \cdot q_0$ Momentul $M_{electric}$ determinat de cele două forțe electrice are expresia $M_{electric} = q_0 \cdot R \cdot b$ Rotirea α a pendulului de torsiune datorată acestui moment are expresia $\alpha = \frac{q_0 \cdot R \cdot b}{k}$	0,4 0,4 0,3	
Oficiu		**1**

Problema a III-a

		punctaj parțial	punctaj total
a)	Notând perturbația produsă de undă cu y, atunci, conform enunțului $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$, unde A este amplitudinea perturbației, ω - pulsația undei, k - numărul de undă, iar φ_0 - faza inițială.	0,2	1
	Tangenta la coardă într-un punct este $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = -kA\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$,	0,2	
	în timp ce viteza de oscilație a elementului de coardă pe care se găsește punctul considerat este $v = \frac{dy}{dt} = \omega A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.	0,2	
	Utilizând definiția vitezei de fază a undei $c = \frac{\omega}{k}$,	0,2	
	din relațiile de mai sus rezultă $tg\alpha = -\frac{v}{c}$, adică $\boxed{\alpha = -arctg\frac{v}{c}}$.	0,2	
b)	Elementele corzii sunt scoase din starea de echilibru de către componenta transversală a tensiunii, $F = -T\sin\alpha \cong -Ttg\alpha = T\frac{v}{c}$, unde s-a ținut cont de faptul că undele au amplitudine mică.	0,50	2
	Pe de altă parte, teorema variației impulsului, aplicată unui element de coardă perturbat, se scrie $F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm(v-0)}{dt} = \frac{\mu dx}{dt}v = \mu cv$.	1	
	Prin urmare $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.	0,50	
c)	Din expresiile de mai sus rezultă că $Z = \frac{T}{c} = \mu c = \sqrt{T\mu}$.	1	1
d)	Neglijând disiparea energiei undei, atunci intensitatea acesteia are aceeași valoare în ambele regiuni ale coardei. Expresia intensității undei se scrie $I = \left\langle \frac{\Delta W}{\Delta t S} \right\rangle = \left\langle \frac{\Delta W}{\Delta V}\frac{\Delta x}{\Delta t} \right\rangle = c\left\langle \frac{\Delta W}{\Delta V} \right\rangle = c\left\langle \frac{\Delta W_c}{\Delta V} + \frac{\Delta W_p}{\Delta V} \right\rangle$.		

	Cum $\dfrac{\Delta W_c}{\Delta V}=\dfrac{\Delta m v^2}{2S\Delta x}=\dfrac{\mu v^2}{2S}=\dfrac{\mu}{2S}\omega^2A^2\cos^2(\omega t-kx+\varphi_0)$, iar $\dfrac{\Delta W_p}{\Delta V}=\dfrac{(\Delta m\omega^2)y^2}{2S\Delta x}=\dfrac{\mu\omega^2y^2}{2S}=\dfrac{\mu}{2S}\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi_0)$, atunci $I=c\dfrac{\mu\omega^2A^2}{2S}=\dfrac{Z}{2S}\omega^2A^2$.	0,50	
	Prin urmare, $\dfrac{Z_1}{2S}\omega^2A_1^2=\dfrac{Z_2}{2S}\omega^2A_2^2$,	0,50	2
	sau $\sqrt{T\mu_1}A_1^2=\sqrt{T\mu_2}A_2^2$, de unde $A_2=A_1\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{1/4}$,	0,50	
	adică $\beta=1/4$.	0,50	
e)	Forța elastică din resort este egală cu componenta transversală a tensiunii din coardă, corespunzătoare coordonatei $x=0$: $K\Delta y=T_y\big|_{x=0}$,	0,50	
	sau $K[A\cos\omega t-B\cos(\omega t+\varphi_0)]=-T\dfrac{v}{c}=Z\omega B\sin(\omega t+\varphi_0)$.	1	
	De aici rezultă $tg\varphi_0=\dfrac{Z\omega}{K}$	0,75	3
	și $B=\dfrac{A}{\sqrt{1+\left(\dfrac{Z\omega}{K}\right)^2}}$.	0,75	
	Observație: La înlocuirea resortului cu o tijă rigidă ($K\to\infty$), oscilațiile extremității coardei sunt în fază cu cele ale excitatorului, iar amplitudinile sunt egale.		
	Oficiu		1