**MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI IAŞI**
**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**"ADOLF HAIMOVICI"**
**25 – 27 mai 2007**

## Clasa a XII-a - ECONOMIC

**1.** Fie $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ două funcţii continue pe [0, 1] şi m=min f(x), M=max g(x), pe acest interval, astfel încât:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\frac{m+M}{2}$$

Să se arate că:

**a)** $f(x)\cdot g(x)+m\cdot M\le m\cdot g(x)+M\cdot f(x),(\forall)x\in[0,1]$.

**b)** $\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\frac{1}{2}\left(m^2+M^2\right)$

**2. a)** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, o funcţie continuă.

Arătaţi că există $c\in(a,b)$ astfel încât: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$;

**b)** Să se arate că: $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{5x}\frac{\cos t-1}{t}dt=0$;

c) Arătaţi că: $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{5x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\ln 5$.

**3**. Se consideră numărul complex $\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$.

Să se arate că pentru orice $z\in\mathbb{C}$ şi $r\in(0,\infty)$, numărul $\sum_{k=1}^{5}\frac{\left|z-r\alpha^k\right|^2}{|z|^2+r^2}$ este întreg.

**4.** Se consideră hexagonul regulat $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$ cu vârfurile colorate în roşu sau negru. Notăm cu G mulţimea tuturor colorărilor în roşu sau negru a vârfurilor. Pe G definim legea de compoziţie internă * astfel:

Colorărilor $c_1$ şi $c_2$ le ataşăm colorarea $c_1 * c_2$ definită prin:

1.Dacă vârful $A_i(i=\overline{1,6})$ are în $c_1$ şi $c_2$ aceiaşi culoare, în $c_1*c_2$ îl colorăm în roşu;

2.Dacă vârful $A_i(i=\overline{1,6})$ are în $c_1$ şi $c_2$ culori diferite, în $c_1*c_2$ îl colorăm în negru.

Exemplu:

Dacă $c_1$ = (N,R,R,N,N,R), $c_2$ = (R,R,N,N,N,N); atunci $c_1*c_2$ = (N,R,N,R,R,N)
( $R\equiv$ roşu, $N\equiv$ negru)

Să se arate că:

**a)** Colorarea $c_0$ = (R, R, R, R, R, R) este element neutru faţă de *;

**b)** (G, *) este grup abelian.

**Nota:** Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 1 la 7