INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA A VI-A

BAREM

1. $(2+4+6+8+...+84)\cdot(\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{11\cdot 13}+...+\frac{2}{19\cdot 21})=$
$=4(1+2+3+...+42)(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{19})$...**2p**
$4\cdot 42\cdot 43:2\cdot\frac{2}{21}$...**3p**
Finalizare **2p**

2.a. $1+8+64=73$...**1p**

b. $S=(1+8+8^2)+8^3(1+8+8^2)+...+8^{57}(1+8+8^2)=$...**1p**
$=73(1+8^3+...+8^{57})\Rightarrow 73|S$... **1p**

c. $S=1+8+8^2(1+8)+...+8^{59}(1+8)=$...**1p**
$=9(1+8^2+8^3+...+8^{58})$...**1p**
$(73,9)=1\Rightarrow 657|S$...**2p**.

3. Notăm $m(\sphericalangle APN)=x, m(\sphericalangle CNM)=y, m(\sphericalangle BMP)=z$
Punctele B,M,C sunt coliniare rezultă $x+z+m(\sphericalangle NMP)=180$
Punctele A,N,C sunt coliniare rezultă $y+z+m(\sphericalangle MNP)=180$
Punctele A,P,B sunt coliniare rezultă $x+y+m(\sphericalangle NPM)=180$...**2p**
Adunand cele trei relatii obtinem :
$2(x+y+z)+m(\sphericalangle NMP)+m(\sphericalangle MNP)+m(\sphericalangle NPM)=540\Rightarrow$
$\Rightarrow x+y+z=180$...**1p**
$m(\sphericalangle BAC)=y, m(\sphericalangle ABC)=x, m(\sphericalangle BCA)=z$
şi $m(\sphericalangle MPN)=z, m(\sphericalangle MNP)=x, m(\sphericalangle PMN)=y$...**1p**

Considerăm triunghiurile ΔAPN şi ΔMNP
$\sphericalangle APN\equiv\sphericalangle PMN$
$[PN]\equiv[PN]$-latură comună

$\sphericalangle ANP \equiv \sphericalangle MPN \Rightarrow \Delta APN \equiv \Delta MNP$...**2p**
Analog $\Delta BPM \equiv \Delta MNP$ si $\Delta CMN \equiv \Delta MNP \Rightarrow$ punctele M,N,P sunt mijloacele laturilor triunghiului...**1p**

4. $(a, a+7) \cdot [a, a+7] = a \cdot (a+7) \Rightarrow$
$\Rightarrow [a, a+7] = \dfrac{a \cdot (a+7)}{(a, a+7)}$ ...**1p**
Analog pentru b $\Rightarrow [b, b+7] = \dfrac{b \cdot (b+7)}{(b, b+7)} \Rightarrow \dfrac{a(a+7)}{(a, a+7)} = \dfrac{b(b+7)}{(b, b+7)}$**(1)**...**1p**
$(a, a+7)|a$ si $(a, a+7)|a+7 \Rightarrow (a, a+7)|7 \Rightarrow (a, a+7)\epsilon\{1, 7\}$...**1p**
Similar $(b, b+7)\epsilon\{1, 7\}$

• Dacă $(a, a+7) = (b, b+7)$ si inlocuind in relatia (1) $\Rightarrow a(a+7) = b(b+7)$...**1p**
Vom arata că $a = b$
Dacă $a < b \Rightarrow a+7 < b+7 \Rightarrow a(a+7) < b(b+7)$ - nu convine
Dacă $a > b \Rightarrow a+7 > b+7 \Rightarrow a(a+7) > b(b+7)$ - nu convine $\Rightarrow a = b$...**1p**

• Dacă $(a, a+7) = 7$ si $(b, b+7) = 1$
Avem $7|a$ si $7|a+7 \Rightarrow 49|a(a+7) \Rightarrow 7|\dfrac{a(a+7)}{(a, a+7)}$
Din relaţia (1) $\Rightarrow 7|\dfrac{b(b+7)}{(b, b+7)} \Rightarrow 7|b(b+7) \Rightarrow 7|b$ sau $7|b+7 \Rightarrow 7|b$ şi $7|b+7$ ce contrazice $(b, b+7) = 1$...**1p**

• Dacă $(a, a+7) = 1$ si $(b, b+7) = 7$
Avem $7|b$ si $7|b+7 \Rightarrow 49|b(b+7) \Rightarrow 7|\dfrac{b(b+7)}{(b, b+7)}$
Din relaţia (1) $\Rightarrow 7|\dfrac{(a+7)}{(a, a+7)} \Rightarrow 7|a(a+7) \Rightarrow 7|a$ sau $7|a+7 \Rightarrow 7|a$ si $7|a+7$ ce contrazice $(a, a+7) = 1$...**1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA A VI-A

SUBIECTE

1. Calculaţi: $(2+4+6+...+84)\cdot(\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{11\cdot 13}+...+\frac{2}{19\cdot 21})$.

2. Se consideră suma $S = 1+8+8^2+8^3+...+8^{59}$.
   a. Calculaţi suma $1+8+8^2$.
   b. Arataţi că $73|S$ şi $657|S$.

3. Punctele M,N,P sunt respectiv pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC. Ştiind că $\sphericalangle APN \equiv \sphericalangle NMC$, $\sphericalangle CNM \equiv \sphericalangle MPB$, $\sphericalangle BMP \equiv \sphericalangle PNA$ şi suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este $180°$, demonstraţi că punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

4. Dacă a şi b sunt numere naturale astfel încât $[a, a+7] = [b, b+7]$ arătaţi că $a = b$.

NOTĂ:

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.