1.

$det(A^2+I_2) = det[(A+iI_2)(A-iI_2)] = det(A+iI_2)\, det(A-iI_2) = 0 \Rightarrow det(A+iI_2) = 0\ sau\ det(A-iI_2) = 0$ ……………………………………………….2p

Dacă $det(A+iI_2)=0$, considerând $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ va rezulta $\begin{vmatrix} a+i & b \\ c & d+i \end{vmatrix} = (ad-bc-1)+i(a+d)=0$ deci $ad-bc=1$ și $a+d=0,$ sau $d=-a$ și $a^2+bc=-1$ ………………………………………………………………………………….............**2p**

Rezultă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ și $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ = -I_2

În cazul $det(A+iI_2)=0$ vor rezulta aceleași relații $ad-bc=1$ și $a+d=0$, apoi …relația………………………………………………………….. **3p**

2. a) Folosind $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow det(A \cdot A^{-1}) = 1$ și $detA\ \cdot det(A^{-1}) = 1,$ deci $det(A^{-1}) = \frac{1}{d}$
………………………………………………………………………………..….2p
Din relația $d \cdot A^{-1} = A^* \Rightarrow det(d \cdot A^{-1}) = detA^*$ deci $d^3 \det A^{-1} = detA^*,$ adică $detA^* = d^2$ …………………………………………………………………**2p**
b) Presupunând că există matricele, trecând la determinanți ar rezulta:
$$\det X \cdot det\ Y = d$$
$$\det Y \cdot det\ Z = d$$
$$\det Z \cdot det\ X = d$$
Înmulțind relațiile ar rezulta:
$(\det X\ \cdot \det Y \cdot det\ Z)^2 = d^3 < 0$ (contradicție) …………………… **3p**

3. a) Considerând expresia de sub limită sub forma:
$$f(x) = \frac{\left[\left(\frac{tg(a_1x)}{a_1x}\right)a_1 + \cdots + \left(\frac{tg(a_nx)}{a_nx}\right)a_n\right]^2}{\left(\frac{tg(a_1^2x)}{a_1^2x}\right)a_1^2 + \cdots + \left(\frac{tg(a_n^2x)}{a_n^2x}\right)a_n^2}$$
Atunci
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{(a_1+a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$
………………………………………………………………………………………5p

Cum $b_n \geq n \Rightarrow (a_1+a_1+\cdots+a_n)^2 \geq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$
Pe de altă parte, în baza inegalității C-B-S avem relația: $(a_1+a_1+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$ cu egalitate dacă $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \ldots = \frac{a_n}{1}$; din dubla inegalitate rezultă

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ (cazul de egalitate), adică $a_1 = a_1 = \dots = a_n$
……………………………………………………………………………………2p

4. Avem

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k-1} = \frac{2\cdot 2}{1}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot \dots\dots\dots \cdot\frac{n\cdot n}{n-1} = \frac{n!\cdot n!}{(n-1)!} = n!\cdot n = n!\cdot\left[(n+1)-1\right] = (n+1)!-n!,$$

$$b_n = \sum_{k=2}^{n}\left[(k+1)!-k!\right] = (n+1)!-2,\ c_n = \frac{(n+1)!-2}{(n+1)!} = 1-\frac{2}{(n+1)!},$$ ……………………….3p

$$d_n = \left(1+\frac{-2}{(n+1)!}\right)^{(n+1)!}$$ …………………………………………………………………………………..1p

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{(n+1)!}\right) = 1+0 = 1$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{(n+1)!}\right)^{(n+1)!} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{(n+1)!}\right)^{\frac{(n+1)!}{-2}}\right]^{\frac{-2}{(n+1)!}\cdot(n+1)!} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$ ……………………………………………………………….3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A^2 + I_2) = 0$. Arătați că $A^2 = -I_2$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = d < 0$.

   a) Să se calculeze $det(A^{-1})$ și $det(A^*)$
   b) Să se arate că nu există matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $XY = YZ = ZX = A$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *și* $a_{1,} a_{2,} \ldots \ldots .., a_n \in \mathbb{R}^*$.
   a) Să se calculeze:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(tg(a_1 x) + \ldots \ldots . + tg(a_n x)\right)^2}{x\left(tg(a_1^2 x) + \ldots \ldots . + tg(a_n^2 x)\right)}$$
   b) Să se arate că dacă b_n este rezultatul limitei de la punctul a) și $b_n \geq n$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots \ldots .. = a_n$.

Traian Ianculescu, Zimnicea, Teleorman

4. Considerăm șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 2}\,(a_n)_{n\geq 2}, (b_n)_{n\geq 2}, (c_n)_{n\geq 2}, (d_n)_{n\geq 2}$, cu termenii generali definiți astfel:
$$x_n = \left(n + \frac{n}{n-1}\right)$$
$$a_n = x_2 x_3 \ldots x_n,\ \ b_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n,\ \ c_n = \frac{b_n}{(n+1)!}, d_n = (c_n)^{(n+1)!}$$

   Să se calculeze limitele șirurilor $(c_n)_{n\geq 2}$ și $(d_n)_{n\geq 2}$.

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.