OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a X -a

PROBLEMA 1. Fie $a \in\ 0,1$ si $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,astfel incat

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n{}^2 = 0.$$

Demonstrati inegalitatea

$$\log_a \left(\sum_{i=1}^{n} a^{x_i} \right) \le \log_a n + \frac{1}{4n}.$$

Prof.Sorin Ulmeanu

PROBLEMA 2.Demonstrati ca valoarea expresiei

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + ... + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + ... + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}}$$

este constanta pentru orice numere intregi pozitive.

Olimpiada Filipine

PROBLEMA 3. Fie $a,b,c \in \mathbb{C}^*$ distincte astfel incat $|a| = |b| = |c| = 2013$ si

$$a + b + c = a^4 + b^4 + c^4$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^8 + b^8 + c^8$$

Demonstrati ca $a + b + c = 0$.

Prof.univ.Cristinel Mortici

PROBLEMA 4.Fie a,b numere reale si z complex nereale astfel incat $|a-b| = |a+b-2z|$.

a) Sa se arate ca ecuatia $|z-a|^x + |\bar{z}-b|^x = |a-b|^x$,cu necunoscuta reala x, are o singura solutie.

b) Sa se rezolve inecuatia $|z-a|^x + |\bar{z}-b|^x \le |a-b|^x$ cu necunoscuta reala x.

G.M.10-2012

Subiect selectat de prof. ConstantinDrugan

NOTA.Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

BARE
M CLASA a X-a

Problema 1.

Folosirea inegalitatii mediilor: $\sum_{i=1}^{n} a^{x_i} \geq n a^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$ (2p)

Aplicam logaritmul rezulta: $\log\left(\sum_{i=1}^{n} a^{x_i}\right) \leq \log_a n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (2p)

Folosirea ipotezei: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} x_n \ 1 - x_n \ \leq \frac{1}{4n}$.(2p)

Finalizare.(1p)

Problema2.

Folosim formula radicalilor compusi: $\sqrt{n+\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-\sqrt{m}}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-\sqrt{m}}}{2}}, 0 \leq n, m \leq n^2$.(2p)

Putem scrie: $\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n-\sqrt{m}}$,(2p)

Iar de aici,finalizand,obtinem constanta $1+\sqrt{2}$ pentru cerinta problemei.(3p)

Problema 3.

Demonstreaza ,folosind ipoteza, $ab+bc+ca = a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4$.(2p)

Prin conjugara acestei relatii obtinem:ab+bc+ca=0(3p).

Conjugam si obtinem: a+b+c=0.(2p)

Problema 4.

Din ipoteza z apartine cercului de centru $\frac{a+b}{2}$ si raza $\frac{|a-b|}{2}$.(1p).

a)Arata $|z-a| \leq |a-b|$ si $|z-b| \leq |a-b|$ (2p),iar de aici demonstreaza x=2 solutie unica(2p)

b)Finalizare $x \in \ 2, \infty$.(2p)