



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 16.02.2013

**Clasa a XII-a**

**Problema 1:**

a) Arătați că  $\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B = \operatorname{arctg} \frac{A - B}{1 + AB}$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - x + 1}} dx$ .

*Gazeta Matematică 1987*

**Problema 2:**

Fie mulțimea  $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ impare} \right\}$  și  $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$ . Pe  $G$  definim legea de

compoziție  $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$ ,  $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Să se arate că funcția

$f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$ ,  $f((q, k)) = q \cdot 2^k$  este un izomorfism între grupurile  $(G, *)$  și  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , unde " $\cdot$ " este operația de înmulțire a numerelor raționale.

Variante Bac 2009

**Problema 3:**

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F$  o primitivă a sa cu proprietatea că  $e^{x-F(x)} = F(x)$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

*Gazeta Matematică 2 / 2012*

**Problema 4:**

a) Este posibil ca într-un grup  $(G, \cdot)$  să existe exact două elemente distincte  $a, b \in G \setminus \{e\}$  astfel încât :

b) Este posibil ca într-un grup  $(G, \cdot)$  să existe exact două elemente distincte  $a, b \in G \setminus \{e\}$  astfel încât :  $ab = ba \neq e$  ?

\* \* \*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.



Olimpiada de matematică  
Etapa locală, Caraș-Severin, 16.02.2013

**Clasa a XII-a**  
**BAREME**

**Problema 1:**

a) Demonstrează formula  $tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$  .....2pct

b) Folosește a) și deduce  $a+b = \arctg\left(\frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}\right)$  .....1pct

Consideră  $a = \arctgx, b = \arctg(1-x)$  și ajunge la identitatea  $\arctgx + \arctg(1-x) = \arctg \frac{1}{x^2 - x + 1}$  .....1pct

Folosește schimbarea de variabilă  $t = 1-x, I = \int_1^0 \frac{\arctg(1-t)}{\arctgt + \arctg(1-t)} (-1)dt = \int_0^1 \frac{\arctg(1-t)}{\arctgt + \arctg(1-t)} dt = J \dots 1pct$

Observăm că  $I + J = 2I = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$  .....2pct

**Problema 2:**

Definiția izomorfismului.....2 pct

Se arată f morfism.....1 pct

Se arată f injectivă.....1 pct

Se arată f surjectivă.....1 pct

**Problema 3:**

Avem că  $f(x) = F'(x) = e^{x-F(x)}(1-f(x))$  .....3pct

De unde  $f(x)(1-f(x)) = e^{x-F(x)}(1-f(x))^2 \geq 0$  .....1pct

Obține că  $f(x) \in [0;1]$  .....1pct

Obține limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  .....2pct

**Problema 4:**

a) Da, de exemplu  $G = \{e, a, b\}$  cu  $a^2 = b, b^2 = a$  și alcătuieste tabla operației.....2pct

Presupune prin (RA) că există exact două elem. cu prop. din enunț; deduce  $ab \neq a, ab \neq b, ab \neq e (\dots)$ .....1pct

Observă că  $a(ab) = a(ba) = (ab)a$  și  $(ab)b = (ba)b = b(ab)$  .....1pct

Dacă unul dintre elementele  $aba$  sau  $bab$  este  $e$ , celălalt este diferit de  $e$ .....1pct

Există așadar cel puțin trei elemente  $a, b, ab$  cu proprietatea din enunț, absurd.....2pct