Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluţii

Problema 1. $\sqrt{2012-2\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-1$, $\sqrt{2015-4\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-2$,

Determinăm $a \in Q$ astfel încât $a(\sqrt{2011}-1)+\sqrt{2011}-2 \in Q \Leftrightarrow \sqrt{2011}(a+1)-a-2 \in Q$.

Deoarece 2011 este numar prim $\Rightarrow \sqrt{2011} \in R\backslash Q$

Deducem $a=-1$.

Problema 2.

Deoarece $|x-1|, |2-x|, |x-3|, |4-x|, ..., |2012-x|, |x-2013| \geq 0$ $\Rightarrow |x-1|+|2-x|+|x-3|+|4-x|+...+|2012-x|+|x-2013| \geq 0 \Rightarrow$ $2014(x-2014) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2014$.

Deducem că $|x-1|=x-1, |2-x|=x-2, |x-3|=x-3, |4-x|=x-4, ..., |2012-x|=x-2012, |x-2013|=x-2013$.

Ecuaţia dată devine $2013x-2013\cdot 1007=2014x-2014^2 \Rightarrow x=1007\cdot 2015$.

Problema 3. $A_{ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}, A_{BDC}=\frac{d(D,BC)\cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC}=A_{BDC} \Rightarrow d(A,BC)=d(D,BC) \Rightarrow AD \parallel BC$ (deoarece A, D apartin aceluiasi semiplan determinat de BC);

$A_{ACD}=\frac{d(A,CD)\cdot CD}{2}, A_{BDC}=\frac{d(B,CD)\cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD}=A_{BDC} \Rightarrow d(A,DC)=d(B,DC) \Rightarrow AB \parallel CD$ (deoarece A, B apartin aceluiasi semiplan determinat de DC);

Deducem că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă în plus, $P_{ABC}=P_{BDC} \Rightarrow AB+BC+CA=DB+BC+CD \Rightarrow CA=DB$ (deoarece din $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow AB=CD$).

Deducem că $ABCD$ este dreptunghi.

Problema 4. a) Deducem că $NQ=2BC$ şi $NQ \parallel BC$;

Deoarece $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ=2AD$ şi $NQ \parallel AD$.

Cum A este mijocul lui $MN \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ.

b) MP şi NQ nu pot fi paralele între ele.

Pentru ca $MN \parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC', unde C' este simetricul lui C faţă de B.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu ___ 1p
$\sqrt{2012-2\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-1$ ___ 2p
$\sqrt{2015-4\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-2$ ___ 2p
$\sqrt{2011}(a+1)-a-2\in Q$ ___ 2p
2011 nr prim $\Rightarrow \sqrt{2011}\in R\backslash Q$ ___ 1.5p
$a=-1$ ___ 1.5p
Total ___ 10p

Problema 2.

Oficiu ___ 1p
$|x-1|, |2-x|, |x-3|, |4-x|, ..., |2012-x|, |x-2013|\geq 0 \Rightarrow$ ___ 1p
$|x-1|+|2-x|+|x-3|+|4-x|+...+|2012-x|+|x-2013|\geq 0$ ___ 1p
$\Rightarrow 2014(x-2014)\geq 0 \Rightarrow x\geq 2014$ ___ 1p
$|x-1|=x-1, |2-x|=x-2, |x-3|=x-3, |4-x|=x-4, ..., |2012-x|=x-2012, |x-2013|=x-2013$ ___ 2p
Ecuaţia dată devine $2013x-2013\cdot 1007=2014x-2014^2$ ___ 3p
$\Rightarrow x=1007\cdot 2015$ ___ 1p
Total ___ 10p

Problema 3.

Oficiu ___ 1p
$A_{ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}, A_{BDC}=\frac{d(D,BC)\cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,BC)=d(D,BC)\Rightarrow AD \parallel BC$ ___ 2p
$A_{ACD}=\frac{d(A,CD)\cdot CD}{2}, A_{BDC}=\frac{d(B,CD)\cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,DC)=d(B,DC)\Rightarrow AB \parallel CD$ ___ 2p
$AD \parallel BC, AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ este paralelogram ___ 1p
$P_{ABC}=P_{BDC}\Rightarrow AB+BC+CA=DB+BC+CD$ ___ 2p
$\Rightarrow CA=DB\Rightarrow ABCD$ este dreptunghi ___ 2p
Total ___ 10p

Problema 4.

Oficiu ___ 1p
a) $NQ=2BC$ şi $NQ \parallel BC$; ___ 1p
$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ=2AD$ şi $NQ \parallel AD$. ___ 1p
A este mijlocul lui $MN \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ. ___ 2p
b) MP şi NQ nu pot fi paralele între ele ___ 2p
Pentru ca $MN \parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC', unde C' este simetricul lui C faţă de B ___ 3p
Total ___ 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Determinaţi $a \in Q$ astfel încât

$$a\sqrt{2012 - 2\sqrt{2011}} + \sqrt{2015 - 4\sqrt{2011}} \in Q.$$

(Gazeta Matematică)

Problema 2. Aflaţi numerele reale x, pentru care $|x-1| + |2-x| + |x-3| + |4-x| + ... + |2012-x| + |x-2013| = 2014(x-2014)$.

(Gazeta Matematică)

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care triunghiurile ABC, ACD şi BDC au arii egale. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă triunghiurile ABC şi BDC au şi perimetre egale, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

***

Problema 4. Se consideră un punct M în planul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M faţă de A, P simetricul lui N faţă de B şi Q simetricul lui P faţă de C.

a) Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D şi că D este mijlocul segmentului $[MQ]$;

b) Unde trebuie să se afle punctul M pentru ca $MNQP$ să fie trapez ?

(Gh. Ţiţeica, Culegere de probleme)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 3 ore.