Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a IX-a

1.

(i) Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=x-1$, $x\in\mathbb{R}$, unde pentru $a\in\mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

(ii) Să se determine o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $6/7^n+a_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2.

(i) Arătați că $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}.$

(ii) Demonstrați că $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde pentru $a\in\mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

3.

(i) Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se arate că $4(a+c)(b+d)\leq(a+b+c+d)^2$.

(ii) Numerele reale pozitive x,y,z,t au suma egală cu 4. Să se arate că $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{t}+t\sqrt{x}\leq 4$.

GM 2014

4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC,BCD,CDA, respectiv DAB și cu M,N mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$.

(i) Arătați că segmentele $[DH_1],[AH_2],[BH_3],[CH_4]$ au același mijloc P.

(ii) Arătați că punctele O,P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a IX-a

1.

(i) $x-1=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$ — 1p

$x-1\leq\dfrac{2x-1}{3}<x$ și finalizare — 2p

(ii) Fie $a_n=a_1+(n-1)r$ cu $a_1\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}$

Atunci $6/7+a_1$ și $6/7^{n+1}-7^n+r=6\cdot7^n+r$ — 1p

Luăm $a_1=5$ și $r=6$ și prin inducție $6/7^n+6n-1, n\in\mathbb{N}^*$. — 3p

2. (i) Întrucât $4n+2$ nu este pătrat perfect, atunci $\exists k\in\mathbb{N}^*$ astfel ca

$k^2<4n+2<(k+1)^2$ și $\left[\sqrt{4n+2}\right]=k$ — 1p

de unde $k^2\leq 4n+1<(k+1)^2$ — 1p

și în concluzie $\left[\sqrt{4n+1}\right]=k$ — 1p

(ii) $\sqrt{4n+1}\leq\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ — 2p

De unde $\left[\sqrt{4n+1}\right]\leq\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\leq\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]\quad\forall n\in\mathbb{N}$. — 2p

3.

(i) Fie $a+c=u$ și $b+d=v$ — 1p

Atunci inegalitatea este echivalentă cu $4uv\leq(u+v)^2$ sau $0\leq(u-v)^2$, care este adevărată. — 1p

(ii) Din $\sqrt{a}\leq\dfrac{a+1}{2}, a\geq 0$ și $x+y+z+t=4$ — 1p

deducem că $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{t}+t\sqrt{x}\leq\dfrac{x+xy+y+yz+z+zt+t+tx}{2}=2+\dfrac{(x+z)(y+t)}{2}$ — 2p

Din (i) și din ultima inegalitate se deduce cerința (ii). — 1p

4.

(i) Din relația lui Sylvester avem $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ și analoagele — 2p

Cum $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ și analoagele obținem că segmentele

$[DH_1],[AH_2],[BH_3],[CH_4]$ au același mijloc. — 2p

(ii) Fie Q mijlocul lui $[MN]$. Atunci $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ — 1p

Dar $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ deci $2\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}$ de unde O,P,Q sunt coliniare — 2p