OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a X-a

1. Fie z=1+i. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n, există a_n, b_n numere reale, astfel încăt $z^n=a_nz^2+b_n$.

Pătraşcu Enache

2. Fie $E(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4+(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x-3}}{x^3+3x^2+(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

   a) Să se determine numărul real x pentru care expresia E(x) are sens.

   b) Să se simplifice E(x).

Pătraşcu Enache

3. Fie a, b numere reale pozitive, cu proprietatea $\sqrt[5]{1+a^5}=b$.

   Să se rezolve ecuaţia: $1+x^{\log_b a}=x$, x număr pozitiv.

Pătraşcu Enache

4. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, cu proprietatea

   ln(xy) $\le$ f(x)+f(y)-x-y $\le$ f(xy)-xy, oricare ar fi x,y.

G.M. 12/2015

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Pătraşcu Enache - C. N. "Unirea" Focşani

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a X-a

Soluţii cu barem

Nr.crt	Rezolvarea problemei	Punctaj
1.	$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$	1p
	$z^2=2i$	2p
	$\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=2ia_n+b_n$	3p
	$a_n=\sqrt{2}^{n-2}\sin\frac{n\pi}{4}, b_n=\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$	1p
2. a	$x^2+2x-3\geq 0$ şi $x^3+3x^2+(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x-3}\neq 0$	2p
	$x\in(-\infty,-3)\cup[1,\infty)$	2p
b	$x\geq 1\Rightarrow E(x)=\frac{(x+2)\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+3}}$	1p
	$x<-3\Rightarrow E(x)=-\frac{(x+2)\sqrt{1-x}}{x\sqrt{-3-x}}$	2p
3.	$\sqrt[5]{1+a^5}>1\Rightarrow b>1$	1p
	$\sqrt[5]{1+a^5}>a\Rightarrow b>a$	1p
	Dacă $\log_b x=y$, ecuaţia se scrie $1+a^y=b^y$	1p
	$(\frac{1}{b})^y+(\frac{a}{b})^y=1$,b>1, b>a $\Rightarrow$ y=5 soluţie unică.	3p
	Deci $x=b^5$	1p
4.	x=y=1 $\Rightarrow$ f(1)=1	1p
	y=1/x $\Rightarrow$ f(x)+f(1/x)=x+1/x	2p
	y=1 $\Rightarrow$ f(x)$\geq$ lnx+x	1p
	f(1/x) $\geq$ 1/x-lnx	1p
	f(x) + f(1/x) $\geq$ x+1/x	1p
	Deci f(x)=x+lnx	1p

NOTĂ. Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.