OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Aflaţi toate numerele prime care sunt cu 4 mai mici decât un pătrat perfect.

(Manual Matematică pentru clasa a VIII-a, Dana Radu şi Eugen Radu, Editura Teora)

2. Fie $a,b,c \in (0;\infty)$ cu $a \cdot b \cdot c = 1$.

a) Verificaţi egalitatea: $\frac{1}{1+a^2c} + \frac{1}{1+b^2c} = 1$;

b) Demonstraţi că: $\frac{1}{1+a^2b} + \frac{1}{1+b^2c} + \frac{1}{1+c^2a} < 2$;

(Vasile Berghea, Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2014, Editura Bîrchi)

3. În prisma triunghiulară regulată ABCDEF, DA $\perp$ (ABC), DA=AB=6cm, G e centrul de greutate pentru triunghiul DEF, O e centrul feţei BCEF, iar P mijlocul lui [EF]

a) Arătaţi că AF $\parallel$ (DBP).

b) Determinaţi m($\sphericalangle$ (OG;FC));

c) Determinaţi d(BC;(AFE))

(Dorina Bocu, Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2014, Editura Bîrchi)

4. Fie piramida regulată VABCD, {O}=AC∩BD, şi P,Q $\in$ (VO). Dacă {E}=AP∩CV, {F}=CP∩AV, {S}=BQ∩DV şi {T}=DQ∩BV, arătaţi că măsura unghiului dintre dreptele EF şi ST nu depinde de alegerea punctelor P şi Q pe segmentul (VO).

(Daniel Blănaru, elev, Giugiu, problema E:14748 GM 11/2014)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A VIII-A

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
- fie p numărul prim căutat. $p=k^2-4$, $k\in N$........	2p
- $p=(k-2)\cdot(k+2)$........	2p
- p fiind număr prim => $k-2=1$ şi $k+2=p$........	2p
- finalizare $k=3$ şi $p=5$........	1p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\frac{1}{1+a^2c}+\frac{1}{1+b^2c}=\frac{abc}{abc+a^2c}+\frac{abc}{abc+b^2c}=\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=1$;........	3p
b) $\frac{1}{1+a^2b}+\frac{1}{1+b^2c}+\frac{1}{1+c^2a}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{1}{1+\frac{b}{a}}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=$ $=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}$; cu $xyz=1$........	2p
- arată că $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}<2$;........	2p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
– figura corespunzătoare problemei	1p
a) - Q fiind mijlocul lui [BC], $\begin{cases} FQ\parallel BP \\ AQ\parallel DP \end{cases}\Rightarrow (BDP)\parallel(AQF)$	1p
- cum $AF\subset(AQF)\Longrightarrow AF\parallel(DBP)$	1p
b) $FC\parallel PO$ => m(∢ (OG;FC))=m(∢ (OG;OP))=m(∢GOP)........	1p
- în ΔGOP, PO=3cm, GP=$\sqrt{3}$ cm, $tg(\angle GOP)=\frac{GP}{PO}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow m(\angle GOP)=30^0$........	1p
c) fie $QT\perp AP$, $T\in AP$, $EF\perp TQ$=> $QT\perp(AEF)$; $BC\perp TQ$=> d(BC;(AFE))=TQ	1p
-TQ=$\frac{AQ\cdot PQ}{AP}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 6}{3\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}cm$	1p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
- figura corespunzătoare problemei	1p
- ΔPAC isoscel; ΔEAC≡ΔFCA=>[AF]≡[CE ; aplicand teorema lui Thales=>EF ǁ AC …...	3p
-analog ST ǁ BD..	1p
-m(∢EF;ST)=m(∢AC;BD)=90^0..	2p