OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A X-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie $f: [0,1] \to [0,1]$ o funcție bijectivă. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $(f \circ f)(x) = x,\ (\forall)\, x \in [0,1]$;

b) $(f \circ f)(x) + f(x) = x + f^{-1}(x),\ (\forall)\, x \in [0,1]$

Rozalia Marinescu, Hunedoara (GMB , nr.12/2014)

2. Fie numerele reale $a,\ b \in (1, \infty),\ a < b$, și numerele $x, y \in (a, b)$. Să se arate că $log_x[(a+b)y - ab] \cdot log_y[(a+b)x - ab] \geq 4$.

Ion Călinescu, Câmpulung Muscel

3. Fie $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\}$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $|z+1|^2 + |z-3|^2$ atunci când $z \in M$ și pentru ce valoare se realizează .

4. Fie $f: R \to R$, $f(x) = a^x - a^{-x}, a > 0,\ a \neq 1$.

a) Să se studieze monotonia funcției f ;

b) Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze inversa sa.

C.d.p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A X-A

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

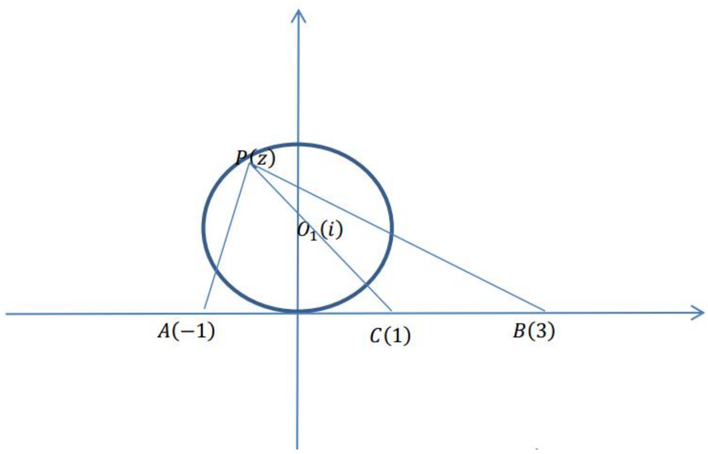
Subiectul 1.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\Longrightarrow$: Presupunem că $f\big(f(x)\big)=x,\ (\forall)\,x\in[0,1]$ (1). Atunci $f(x)=f^{-1}(x)$ și adunând cele două relații obținem că $f\big(f(x)\big)+f(x)=x+f^{-1}(x)$	2p
$\Longleftarrow$: Presupunem $f\big(f(x)\big)+f(x)=x+f^{-1}(x),\ (\forall)\,x\in[0,1]$. Pentru $x\to f(x)$ obținem $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)+f\big(f(x)\big)=f(x)+x, (\forall)\,x\in[0,1].$ (2)	1p
Notăm $f\big(f(x)\big)=g(x)$	1p
Relația (2) se scrie $f\big(g(x)\big)+g(x)=f(x)+x$ (3)	1p
Fie $h(x)=f(x)+x \Longrightarrow h$ bijectivă (ca sumă de funcții bijective). Din (3) se obține că $h\big(g(x)\big)=h(x)$	1p
și din injectivitate $\Longrightarrow g(x)=x$, adică $f\big(f(x)\big)=x, (\forall)\,x\in[0,1]$.	1p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din $a<x<b \Longrightarrow (x-a)\cdot(x-b)<0$	1p
$x^2-(a+b)x+ab<0 \Longrightarrow \log_y x^2<\log_y[(a+b)x-ab]$ (pentru că $y>a>1$)	2p
Analog $\log_x y^2<\log_x[(a+b)y-ab]$ de unde prin înmulțire rezultă că $\log_y[(a+b)x-ab]\cdot\log_x[(a+b)y-ab]\geq\log_x y^2\cdot\log_y x^2$	2p
$\log_x y^2\cdot\log_y x^2=4\cdot\log_x y\cdot\log_y x=4$	1p
Egalitatea are loc pentru $x=y\in(a,b)$	1p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
 Din teorema medianei aplicăm în $\Delta PAB \Longrightarrow PA^2 + \mathrm{PB}^2 = 2\mathrm{PC}^2 + \frac{1}{2} \cdot AB^2$ ………………	2p
$PA^2 + \mathrm{PB}^2 = \|z+1\|^2 + \|z-3\|^2$ deci expresia este maximă atunci când PC este maxim ….	1p
PC este maxim dacă $O_1 \in (\mathrm{PC})$ …………………………………………………………	1p
$z = x + iy$, ecuația dreptei O_1C este $x + y = 1$. Rezultă sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ și se obține $x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ …………………………………………………………………	2p
Atunci $\|\mathrm{z}+1\|^2 + \|\mathrm{z}-3\|^2 \le 2 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 8 = 14 + 4\sqrt{2}$ ………………………………	1p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $a > 1$ funcția f e strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare (funcția $-a^{-x}$ este strict crescătoare) ………………………………………………………………	1p
iar dacă $a \in (0,1)$ funcția f este strict descrescătoare ……………………………………	1p
b) Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x) = y \Longrightarrow a^{2x} - y \cdot a^x - 1 = 0$ ecuație din care rezultă că $a^x = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0$ ………………………………………………………………………..	2p
$\Rightarrow x = \log_a \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$ deci f este surjectivă………………………………………………	1p
Atunci, conform a) funcția e bijectivă, deci inversabilă și inversa este $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \log_a \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ …………………………………………………………………	2p