Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean Vrancea
Centrul Metodic Focşani I

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală -09.02.2013
Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Determinați numerele reale x, y, z ştiind că $x + y + z = 6$ şi $xy + xz + yz = 12$.

b) Arătați că numărul $S = 6^3 + 13^3 + 20^3 + ... + (7n - 1)^3 + 15n$ se divide cu 7, $\forall$ $n \in \mathbf{N}^*$.

***

Subiectul 2

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătați că numărul $n^4 + n^2 + 3$ nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

G.M. 4/2012

Subiectul 3

Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât $[AB] \equiv [AC] \equiv [AD]$. Fie punctele M, N, P mijloacele segmentelor [BC], [CD], respectiv [DB]. Arătați că dacă $AM \perp AN$, atunci $AP \perp (AMN)$.

***

Subiectul 4

Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD cu baza ABCD şi un plan α neparalel cu planul (ABC), care intersectează segmentele (VA), (VB), (VC) şi (VD) în punctele M, N, P respectiv în Q. Arătați că $\frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{NB}{NV} + \frac{QD}{QV}$.

***

Subiecte propuse de profesorii Gabi Cârstea şi Fănel Lipan

Bareme de evaluare i notare

Subiectul 1

a) $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 12$ 1p

$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$ 1p

Finalizare $x = y = z = 2$ 1p

b) $S=(7 \cdot 1-1)^3+(7 \cdot 2-1)^3+(7 \cdot 3-1)^3+...+(7 \cdot n -1)^3+15n.$ 2p

$S = M_7 - n + 15n$ 1p

Finalizare 1p

Subiectul 2

$n^4 + n^2 + 3 = n^2(n^2 + 1) + 3$, $n^2(n^2 + 1)$ = nr. par => $n^4 + n^2 + 3$ nr. impar ………..… 2p

Presupunem ca $n^4 + n^2 + 3 = a + b$, cu a, b nr. natural prime => a = 2 sau b = 2 …... 2p

Se consideră a = 2. Obținem $b = n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ ……..………2p

$n^2 + n + 1 \geq 1$, $n^2 - n + 1 \geq 1$ nr. naturale => b nu este prim => presupunerea este falsă ……………………………………………………………………………..…1p

Subiectul 3

$AP \perp BD$, $MN \parallel BD \Rightarrow AP \perp MN$ …………………………………………………… 1p

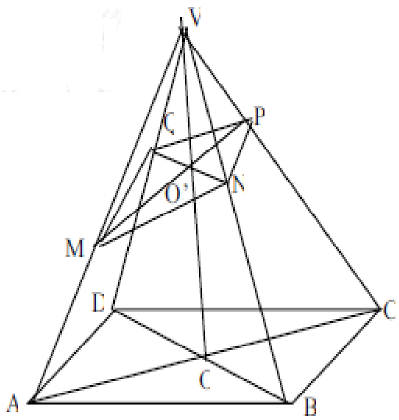
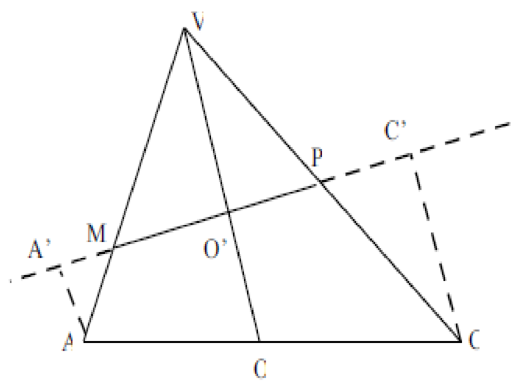
$AM \perp BC$, $BC \parallel PN \Rightarrow AM \perp PN$ …………………………………………………… 1p

AM ⊥ PN, AM ⊥ AN, PN, AN ⊂ (APN) => AM ⊥ (APN) ………………………...…2p

AM ⊥ (APN), AP ⊂ (APN) => AM ⊥ AP ………………………………………..1p

AP ⊥ AM, AP ⊥ MN, AM, MN ⊂ (AMN) => AP ⊥ (AMN) ………………………2p

Subiectul 4

 	
Considerăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $MP \cap NQ = \{O'\}$ În triunghiul $\triangle VAC$ construim paralelele $AA' \parallel VO$ și $CC' \parallel VO$ unde punctele $A', C' \in MP$. În mod evident obținem că $\triangle AA'M \sim \triangle VO'M$ și $\triangle CC'P \sim VO'P$ de unde rezultă egalitățile: $\left.\begin{array}{l} \frac{MA}{MV} = \frac{AA'}{VO'} \\ \frac{PC}{PV} = \frac{CC'}{VO'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{AA'}{VO'} + \frac{CC'}{VO'} = \frac{AA' + CC'}{VO'} \quad (1)$	3p
În trapezul $AA'C'C$ avem OO' linie mijlocie, deci $AA' + CC' = 2 \cdot OO' \quad (2)$ Din relațiile (1) și (2) rezultă că: $\frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{2 \cdot OO'}{VO'}$	3p
În mod analog se arată că: $\frac{NB}{NV} + \frac{QD}{QV} = \frac{2 \cdot OO'}{VO'}$ de unde rezultă egalitatea dorită.	1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA
CENTRUL METODIC FOCȘANI II

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală- 09.02.2013

Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale a și b cu proprietatea a – 6b = - 2 și a $\in$ [-2; 4].

   Să se determine numărul real c = .

2. a) Determinați valoarea minimă a expresiei E(x) =.

   b) Determinați numerele reale x, y, z pentru care:

(G.M. 9 / 2012)

3. In triunghiul ABC cunoaștem BC = 7 cm, M și N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [AC], P este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului ABC cu MN, PA= 3 cm, PB = 4cm. Se ridică perpendiculara PQ = 1 cm pe planul (ABC).

   a) Calculați distanța de la punctul Q la dreapta BC.

   b) Fie $\{D\}$ = BP $\cap$ AC. Calculați tangenta unghiului format de dreapta QD cu planul (ABC).

4. Fie cubul ABCDA'B'C'D' în care AD'$\cap$ A'D = {O} și punctul M este mijlocul muchiei AB. Demonstrați că :

   a) dreapta MO este paralelă cu planul (DBB') ;

   b) dreapta MO este perpendiculară pe planul (A'C'D);

   c) dacă BD'$\cap$ (A'C'D) = {G}, arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului A'C'D.

Subiect propus de:

prof. Dragomir Rodica - Șc. „ Ștefan cel Mare” Focșani

prof. Alexandru Petronela – Lic. Ped.” Spiru Haret” Focșani

Barem de corectare

1. ……………………………………………..1p

……………………………………...……………1p

$a - 6b = -2 \Rightarrow$, $b \in [0, 1]$………..…………………………………….……....1p

……………………………………………………..1,5p

…………………………………………………………..1,5p

…………………………………………………………………………....1p

2. a) E(x) =

....1p

E(x) este minim când este

maxim...0,5p

minim

....0,5p

x =

2...

.......0,5p

E(2) = -

1...

.0,5p

b) $x - 2010 \geq 0$; $y + 2012 \geq 0$; $z - 4 \geq$

0……………………………………………………1p

………………………………………………………………….1p

Relațiile analoage: ; …………………....1p

x = 2011; y = - 2011; z =

5…………………………………………………………………1p

3. a)Δ BMP este

isoscel…………………………………………………………………………1p

Δ ABP este dreptunghic în P, AB=5

cm…………………………………………………….1p

d(P, AB)=d(P, BC)=

cm..……………………………………………………………….1p

T3$\perp$ $\Rightarrow$d (Q, BC) =

QR=cm..1p

b) PN = 1 cm

....

1p

Δ PDN ~ Δ BDC (T.F.A.);

PD=cm…………………………………………………......1p

$\angle$(QD,(ABC))=$\angle$QDP, tg($\angle$QDP)=

cm………………………………………………...1p

4. a) OM linie mijlocie în $\Delta ABD'$, $OM \parallel BD'$, $BD' \subset (DBB')$ $\Rightarrow$

$OM \parallel (DBB')$…………………1p

b) $A'C' \perp (BDD') \Rightarrow A'C' \perp$

BD'……………………………………………………………1p

$A'D \perp (ABD') \Rightarrow A'D \perp$

BD'…………...…………………………………………….1p

$BD' \perp (A'C'D)$, $OM \parallel BD' \Rightarrow OM \perp ($

$A'C'D)$…..……………………………………...……1p

c) Fie $\{G\} = BD' \cap DO'$, deci $\{G\} = BD' \cap (A'C'D)$.Fie $\{O'\} = B'D' \cap A'C'$,

$\Delta\ D'O'G \sim \Delta$

BDG………………………………………………………………………1p

……………………………………………………………………………………..1p

Finalizare..

................1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Centrul Metodic Gugeşti

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013-
CLASA a VIII-a
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013-
CLASA a VIII-a

7p 1. Fie numerele:

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}} \text{ şi } B=\left[\frac{5}{2\sqrt{3}}-\sqrt{27}^{-1}+\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right]\cdot\sqrt{108}$$

a) arătați că $B\in \boldsymbol{N}$

b) calculați $\left(1+A+2\sqrt{3}\right)^{2013}$

c) încadrați numărul $A+B$ între două numere naturale consecutive

7p 2. Paralelogramul *ABCD* şi triunghiul echilateral *CDE* sunt în plane diferite. Fie *F* mijlocul laturii *AD*, *G* centrul de greutate al triunghiului *CDE* şi $FC \cap BD = \{M\}$. Să se demonstreze că:

a) $MG \parallel (ADE)$

b) $MG = \frac{1}{3} AE$

7p 3. Să se arate că : $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-2y+2\right)\geq 4xy$; $x, y>0$

7p 4. În prisma triunghiulară regulată dreaptă ABCA'B'C' avem AA' = $4\sqrt{2}$ cm şi AB = 8 cm. Demonstrați că BC' $\perp$ AB'.

(Problema S:E12.413 din GM 2012).

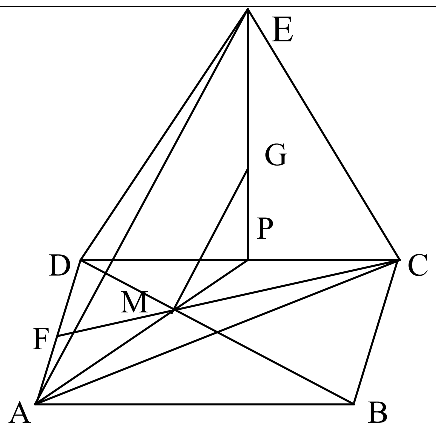
Subiect selectate şi propuse de:
prof. **Ochiuz Claudia**
Școala Gimnazială Gura Caliței
prof. **Botez Liliana**
Școala Gimnazială Tîmboiești

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii
Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp de lucru 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Centrul Metodic Gugeşti

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013
CLASA a VIII-a
Barem de corectare

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1.	a) $B=\left[\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right]\cdot\sqrt{108}$	0,6p
	$B=\left[\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]\cdot\sqrt{108}$	0,4p
	$B=\left[\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right]\cdot\sqrt{108}$	0,2p
	$B=\left[\frac{15\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{18}\right]\cdot 6\sqrt{3}$	0,8p
	$B=\frac{11\sqrt{3}}{18}\cdot 6\sqrt{3}$	0,5p
	$B=11\in N$	0,5p
	b) $A=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$	0,8p
	$A=\left\|2-\sqrt{3}\right\|-\left\|2+\sqrt{3}\right\|$	0,2p
	$A=2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}$	1p
	$A=-2\sqrt{3}$	0,5p
	$\left(1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^{2013}=1^{2013}=1$	0,5p
	c) $A+B=11-2\sqrt{3}\cong 11-2\cdot 1{,}73\cong 11-3{,}46\cong 7{,}54$	0,5p
	$7<A+B<8$	0,5p
2.	 	
	a) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow FD\parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \Delta DMF\sim\Delta BMC\Rightarrow$	

	$\frac{DM}{BM}=\frac{MF}{MC}=\frac{DF}{BC}\Rightarrow\frac{DM}{BM}=\frac{MF}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow M=$ centrul de greutate al $\Delta DCA\Rightarrow\frac{MP}{MA}=\frac{1}{2}$ $\left.\begin{array}{l}\frac{GP}{EG}=\frac{1}{2}\\ \frac{PM}{MA}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\frac{GP}{EG}=\frac{PM}{MA}\xRightarrow{\text{R.T.Th}} GM // AE$ $\left.\begin{array}{l}GM // AE\\ AE\subset(ADE)\\ GM\not\subset(ADE)\end{array}\right\}\Rightarrow GM //(ADE)$	2p 1p 1p
	b) $GM // AE\xRightarrow{\text{T.F.A}}\Delta PGM\sim\Delta PEA\Rightarrow\frac{PG}{PE}=\frac{PM}{PA}=\frac{GM}{EA}$ $\frac{\frac{1}{3}PE}{PE}=\frac{GM}{EA}\Rightarrow\frac{GM}{EA}=\frac{1}{3}\Rightarrow GM=\frac{1}{3}EA$	1,5p 1,5p
3.	$x\left(x+\frac{2}{x}+2\right)y\left(y+\frac{2}{y}-2\right)\geq 4xy$ $\left(x+\frac{2}{x}+2\right)\left(y+\frac{2}{y}-2\right)\geq 4$ $m_a\geq m_g\Rightarrow\frac{x+\frac{2}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=\sqrt{2}\Rightarrow x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{2}+2$ $\frac{y+\frac{2}{y}}{2}\geq\sqrt{y\cdot\frac{2}{y}}=\sqrt{2}\Rightarrow y+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow y+\frac{2}{y}-2\geq 2\sqrt{2}-2$	1p 0,8p 1,6p(0,4x4)

	$\left(x+\frac{2}{x}+2\right)\left(y+\frac{2}{y}-2\right)\geq\left(2\sqrt{2}+2\right)\left(2\sqrt{2}-2\right)\Rightarrow\left(x+\frac{2}{x}+2\right)\left(y+\frac{2}{y}-2\right)\geq 4$	1,6p(0,4x4) 2p
4.	Construim M şi M\` simetricele punctelor B respectiv B\`față de dreptele AC respectiv A\`C\` AM paralel şi congruent cu B\`C\` rezultă că AM C\`B\` paralelogram Deci A B\` paralel şi congruent cu MC\` Să arătăm că AB\` perpendicular pe BC\` putem arăta că unghiul BC\`M este drept Din triunghiul BC\`C se calculază BC\`=$4\sqrt{6}$ Din triunghiul MC\`C se calculază MC\`=$4\sqrt{6}$ Din triunghiul BMC se calculază BM=$8\sqrt{3}$ Cu reciproca teoremei lui Pitagora se demonstrează că unghiul BC\`M este drept deci şi AB\` perpendicular pe BC\`	3p 1p 1p 1p 1p

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA ZONALĂ – 9 FEBRUARIE 2013

CLASA A VIII-A

1.Daca a,b\{0} astfel incat

,aflati valoarea sumelor:

a) b)

2. Fie cubul ABCDA'B'C'D'. Pe diagonala BD**'** proiectăm vârfurile opuse B**'** şi D în M şi, respectiv, în P. Dacă MP = 12 cm, calculați lungimea muchiei cubului.

3.Aratati ca numarul $A=n^2+2n-1$ nu se divide cu 3 , oricare ar fi n numar intreg

G.M .B S:.E 13.31

4. Fie expresia :

.

a) Aduceti expresia la forma cea mai simpla .
b) Determinati valorile lui x pentru care expresia are sens .
c) Determinati aZ, astfel incat E(a) Z.

Subiecte propuse de :prof: Draghici Violeta si prof.Dogaru Daniela

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

Barem Corectare cl a VIII a

1.
a) 1p
....1p
....1p
b) 2p
....1p
....1p

2.
lungimea muchiei cubului - o notăm cu **...**1p
BD = (diagonala patratului)...1p
BD' = (diagonala cubului)...1p

În ∆BDD': 1p
În∆DPD': ;...1p
;.............1p
cm;...1p

3. Discutie

n=3k =>A=$9k^2+6k-1$, nu e divizibil cu 3..2p

n=3k+1 =>A=$9k^2+12k+2$, nu e divizibil cu 3..2p

n=3k+2 =>A=$9k^2+18k+7$, nu e divizibil cu 3..2p

finalizare 1p

4

a) E(x)=..3p
b) xR\{-4,-3, 0}..2p
c) x+4D8..1p
x{-12,-8,-6,-5,-3,-2,0,4}...1p

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA

CENTRUL METODIC VIDRA

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
Clasa a VIII-a

1. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x+1}{2x-1}+\frac{2x^2-x+2}{4x^2-1}-\frac{x-1}{2x+1}\right)\cdot\frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$,

$x\in R-\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$

a.) Aduceți expresia E(x) la forma cea mai simplă.

b.) Determinați elementele mulțimii $A=\{x \mid x\in Z, E(x)\in Z\}$.

2. a) Arătați că, pentru orice numere reale x,y > 0, este adevărată inegalitatea: $\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\le 1$.

b) Demostrați că, pentru orice numere reale a,b,c > 0 pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea: $\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\le\frac{1}{abc}$.

(Gazeta Matematică)

3. Muchia cubului ABCDA'B'C'D' este de 18cm. Calculați:

a) d(D', BC) **b)** d(A, (BDA')) **c)** $tg\sphericalangle\left((A'BD),\ (ABC)\right)$.

4. Triunghiul isoscel ABC se proiectează pe planul α ce conține dreapta BC, după triunghiul dreptunghic $A'BC$. Știind că $A'B=8cm$, $A'C=6cm$, să se calculeze :

a) cosinusul unghiului $A\hat{B}C$;

b) lungimea laturii necongruente cu celelalte laturi ale triunghiului ABC;

c) distanța de la punctul A' la planul (ABC).

Propunător *: prof. Bratu Mihaela – Liceul ”Simion Mehedinți” Vidra*

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a VIII-a

1. a.) $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$ ....
1 p

$E(x)=\dfrac{2x^2+5x+2}{(2x+1)(2x-1)}\cdot\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-4)}$ ....
2 p

$E(x)=\dfrac{x-2}{x-4}$ ....
1p

b.)

$\dfrac{x-2}{x-4}=1+\dfrac{2}{x-4}$ ....1 p

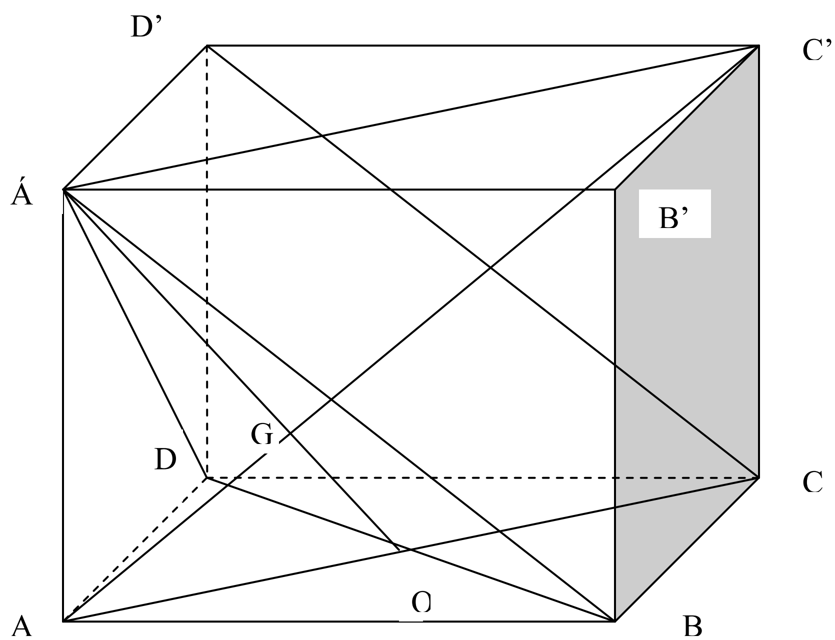
$(\mathrm{x}-2)\in\{\pm 1;\pm 2\}$...1 p

$\mathrm{A}=\{2;3;5;6\}$...
.1 p

2.

DETALII REZOLVARE	BAREM ASOCIAT
a) Prin reducere la absurd, presupunem că $\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{xy}>1$ $(*)$	1p
Cum $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, deducem $\dfrac{2}{x+y}\leq\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.	1p
Astfel, din $(*)$, ajungem la $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}-\dfrac{1}{xy}>1$, fals.	1p
b) Folosind punctul a) şi ipoteza, ajungem la: $\dfrac{1+c}{a+b}=\dfrac{1+1-a-b}{a+b}=\dfrac{2}{a+b}-1\leq\dfrac{1}{ab}$	1p
Analog, obţinem $\dfrac{1+b}{c+a}\leq\dfrac{1}{ac},\dfrac{1+a}{b+c}\leq\dfrac{1}{bc}$.	2p
Însumând ultimile trei relaţii, obţinem $\dfrac{1+a}{b+c}+\dfrac{1+b}{c+a}+\dfrac{1+c}{a+b}\leq\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{abc}$.	1p

3. Figura 1p



a)D’D⊥(ABC), DC⊥BC(ABCD pătrat)→D’C⊥BC→ d(D’, BC)=D’C
......................................1p
În triunghul D’DC prin teorema lui Pitagora
D’C=18$\sqrt{2}$ 1p
b)(A’A)≡(AB) ≡(AD), (BD) ≡(A’D) ≡(A’B) →AA’BD piramidă triunghiulară regulată→d(A,(BDA’)=AG, unde G este centrul cercului circumscris triunghiului A’BD 1p

A’O=BD.$\frac{\sqrt{3}}{2}$= 18$\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$=9$\sqrt{6}$ →A’G=$\frac{2}{3}$ A’O=6$\sqrt{6}$

În triunghiul A’AG prin teorema lui Pitagora AG=6$\sqrt{3}$
....1p
c) A’A⊥(ABC), AO⊥DB → A’O⊥BD
A’O, AO⊥BD →
$m\sphericalangle((A'BD),\ (ABC)) = m\sphericalangle\ (A'OA)$..1p
calculează AO=9$\sqrt{2}$, $tg\sphericalangle\ ((A'BD),\ (ABC)) =$
$\sqrt{2}$ 1p

4. Realizarea desenului

....1 p

Arată că $\Delta A^{'}BC$ este dreptunghic în $A^{'}$ ....1 p

Arată că ΔABC este isoscel cu AB = BC sau AC = BC...1p

Dacă AB = BC = 10 cm, calculează $AA^{'} = 6\,\text{cm}$, AC = $6\sqrt{2}$ cm ....1 p

Calculează $\cos(\angle ABC)=\frac{16}{25}$ şi $d\left(A^{'};(ABC)\right)=\frac{24\sqrt{41}}{41}$ ....1 p

Dacă AC = BC = 10 cm, calculează $AA^{'} = 8\,\text{cm}$, AB = $8\sqrt{2}$ cm ....1 p

Calculează $\cos(\angle ABC)=\frac{2\sqrt{2}}{5}\,\text{cm}$

$d\left(A^{'};(ABC)\right)=\frac{12\sqrt{34}}{17}\,\text{cm}$. ....1 p

MINISTERUL EDUCAȚIEI □I CERCETĂRII
COLEGIUL NA□IONAL “AL. I. CUZA”

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -februarie 2013

Clasa a VIII a

SUBIECTUL I

a) Fie *a, b,c, x, y, z* □$\mathbf{R}^*$ astfel încât: $x = bc + \frac{1}{a}, y = ca + \frac{1}{b}, z = ab + \frac{1}{c}, ax + by + cz = 1$.

Arăta□i că *xyz* □ 0, oricare ar fi *a, b, c* □ $\mathbf{R}^*$**.**

b) Determina□i numerele naturale n pentru care $\sqrt{n^2 + 8n + 51}$ este număr ra□ional.

SUBIECTUL II

Arăta□ă că ecua□ia $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012 - x} + \sqrt{1006}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2012 - x}}$

are 2013 solu□ii în mul□imea numerelor întregi. *(G. M. 9 - 2012)*

SUBIECTUL III

Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AC \cap BD$ = {O}, $BC' \cap CB'$={P} □i Q mijlocul

muchiei DD'. Demonstra□i că dreptele *OQ* □i *AP* sunt perpendiculare.

SUBIECTUL IV

Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel *ABC* cu ipotenuza *BC* = 8 cm, se ridică perpendiculara *BM* = $4\sqrt{2}$ cm. Se cere:

a) $(MAC) \perp (MAB)$;

b) distan□a de la punctul *B* la planul *(MAC);*

c) măsura unghiului format de planele *(MBC)* □i *(MAC)*

Subiecte propuse de prof. Gicu□a Dochi □c.”Duiliu Zamfirescu” Foc□ani

Clasa a VIII a

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) $ax = abc + 1$, $by = abc + 1$, $cz = abc + 1$ și $ax + by + cz = 1 \Rightarrow abc = -\frac{2}{3}$ ……………………2p

$ax = by = cz = \frac{1}{3} \Rightarrow (abc)(xyz) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow xyz = -\frac{1}{18}$ □ 0 ……………………………………….2p

b) $\sqrt{n^2 + 8n + 51} \in \mathbf{Q}, n^2 + 8n + 51 \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt{n^2 + 8n + 51} \in \mathbf{N} \Rightarrow n^2 + 8n + 51 = k^2$, k□$\mathbf{N}$ 1p

$(n+4-k)(n+4+k) = -35$, $n + 4 + k \in \{1, 5, 7, 35\}$……………………………………………1p

Finalizare : $n = 13$……………………………………………………………………...1p

SUBIECTUL II

Condiții de existență a radicalilor : $0 \leq x \leq 2012$ și x □ $\mathbf{N}$...1p

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{1006}}{x - 1006} + \frac{\sqrt{2012 - x} - \sqrt{1006}}{1006 - x} = \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{2012 - x})}{2x - 2012}$,
$x \neq 1006$ 2p

$\sqrt{x} - \sqrt{2012 - x} = \sqrt{x} - \sqrt{2012 - x}$ este verificată pt orice x□$\{0,1,...,1005,1007,...,2012\}$.........2p

$x = 1006$ verifică ecuația dată în enunț...1p

S = {0, 1, 2,....,2012} $\Rightarrow$ ecuația are 2013 soluții întregi………………………………………..1p

SUBIECTUL III

OQ este linie mijlocie în triunghiul $DBD' \Rightarrow OQ \parallel BD'$ 1p

$\angle(OQ, AP) = \angle(BD', AP)$ 1p

$ABC'D'$ este dreptunghi, $AB = a, AD' = a\sqrt{2}, BP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ 2p

$\Delta ABD' \sim \Delta BPA$ (LUL) $\Rightarrow \angle ABD' \equiv \angle BPA, \angle ABD'$ □i $\angle PBD'$ sunt complementare , de unde

$m(\angle PTB) = 90^\circ$, $\{T\} = AP \cap BD'$ 2p

$AP \perp BD' \Rightarrow AP \perp OQ$ 1p

SUBIECTUL IV

a) $MB \perp (ABC), BA \perp AC \xrightarrow{T3\perp} MA \perp AC$

$MA \perp AC, MB \perp AC \Rightarrow CA \perp (MAB), CA \subset (MAC) \Rightarrow (MAC) \perp (MBC)$ 2p

b) d(*B,* *(MAC)*) = *BN,* $BN \perp MA$ 1p

$BN = \frac{MB \cdot BA}{MA} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{8} =$ 4 cm...2p

c) $AD \perp BC, AD \perp MB \Rightarrow AD \perp (MBC), DQ \perp MC \xrightarrow{T3\perp} AQ \perp MC$ 1p

$\angle\big((MBC),(MAC)\big) = \angle(AQ, DQ) = \angle AQD$

$\sin \angle AQD = \frac{AD}{AQ} = \frac{4}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\angle AQD) = 60^\circ$ ....

.....1p

INSPECTORATUL □COLAR JUDE□EAN VRANCEA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - *ADJUD*,

9.02.2013

CLASA a-VIII-a

1. a) Arăta□i că $(x\sqrt{2}-3\sqrt{3})^{2014} \in \mathrm{N}$, unde $x=\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

b) Se consideră mul□imile $A=\left\{x \in \mathrm{Z} \,\middle|\, \frac{5x+7}{2x-3} \in \mathrm{Z}\right\}$ □i

$B=\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-5| \le 11\}$.

Calcula□i $A \cap B$.

2. a) Să se afle minimul expresiei

$E(x,y)=x^4-6x^2+y^2-10y+36, \quad x,y \in \mathbf{R}$ şi valorile

lui x şi y pentru care se obține acest minim;

b) Dacă $a+b+c=0$ □i $abc=2013$ calcula□i $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{a^2c^2}+\frac{c}{a^2b^2}$.

3. Pe planul pătratului ABCD se construieste perpendiculara SA, astfel încât SA = AB = a.

a) Arăta□i că BD $\perp$ SC.

b) Calcula□i distan□a dintre dreptele BD si SC.

c) Dacă M este mijlocul laturii CD, determina□i distan□a de la punctul S la dreapta BM.

Gazeta Matematică

4. În prisma patrulateră regulată ABCDA’B’C’D’, se consideră punctele E, F, respectiv F’, mijloacele muchiilor [AB], [BC], respectiv [B’C’]. Muchia bazei este de 6 cm, iar înăl□imea AA’ = 9 cm.

a) Demonstra□i că AF $\perp$ DE.

b) Calcula□i tangenta unghiului diedru determinat de (F’DE) si (ABC).

c) Fie punctul P situat pe muchia [BB’]. Calcula□i lungimea segmentului BP, stiind că perimetrul Δ A’PF este minim.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 0 – 7 puncte.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Subiecte propuse de: p*rof. Severin Cristinel, □coala Gimnazială Păune□ti*

Barem de corectare şi notare

1. (7 puncte)

a) $x=\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}}-\sqrt{\frac{10-2\sqrt{21}}{2}} \Leftrightarrow$

$x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ .... 2 p

$(x\sqrt{2}-3\sqrt{3})^{2014}=(\sqrt{6}\sqrt{2}-3\sqrt{3})^{2014}=(\sqrt{12}-3\sqrt{3})^{2014}=$
$=(2\sqrt{3}-3\sqrt{3})^{2014}=(-\sqrt{3})^{2014}=3^{1007}\in N$ .... 2 p

b) $A=\left\{x\in Z \,\middle|\, \frac{5x+7}{2x-3}\in Z\right\} \Rightarrow 2x-3 \mid 5x+7$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(2x-3)\mid 2(5x+7)\\(2x-3)\mid 5(2x-3)\end{array}\right\} \Rightarrow (2x-3)\mid 29 \Rightarrow$

$(2x-3)\in\{\pm 1,\pm 29\} \Rightarrow x\in\{-13,1,2,16\}$
$\Leftrightarrow A=\{-13,1,2,16\}$

.... 1 p

□i $B=\{x\in\Re \mid |x-5|\le 11\} \Leftrightarrow |x-5|\le 11 \Leftrightarrow -11\le x-5\le 11$

$\Leftrightarrow B=[-6;16]$.............................. 1 p

$\Leftrightarrow A\cap B=\{1;2;16\}$.............................. 1 p

2. (7 puncte)

a) $E(x,y)=x^4-6x^2+y^2-10y+36, \quad x,y\in\mathbf{R} \Leftrightarrow$ $E(x,y)=(x^2-3)^2+(y-5)^2+2$ 2p

Valoarea minimă este 2 ....1p

pentru $x=\pm\sqrt{3}$ şi y=5 ....1p

b)

$n=\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{a^2c^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{2013^2}\left(a^3+b^3+c^3\right)$........... 1 p

$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=-c^3-3ab(-c)+c^3=3abc$ .... 1 p

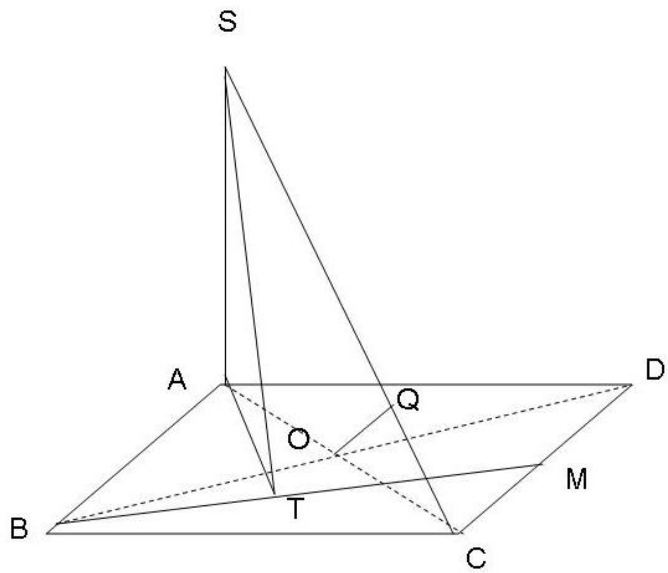
$\Rightarrow n=\frac{1}{2013^2}\left(a^3+b^3+c^3\right)=\frac{3\cdot 2013}{2013^2}=\frac{1}{671}$ .... 1 p

3. (7puncte)

a) $SA \perp (ABC)$, $BD \subset (ABC)$, $\Rightarrow$ $SA \perp BD$ . ... 1 p

$AC \perp BD$ (ABCD pătrat), $\Rightarrow$ $BD \perp (SAC)$ . ... 1 p

Cum $SC \subset (SAC)$, $\Rightarrow BD \perp SC$. .... 1 p



b) Fie O centrul pătratului ABCD. În ΔSAC construim $OQ \perp SC$, $Q \in SC$ că $BD \perp (SAC)$ si, cum $OQ \subset (SAC)$, $\Rightarrow$ $OQ \perp BD$ . ... 1 p

Din $\Delta OQC \sim \Delta SAC$ se ob□ine că $OQ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. .... 1 p

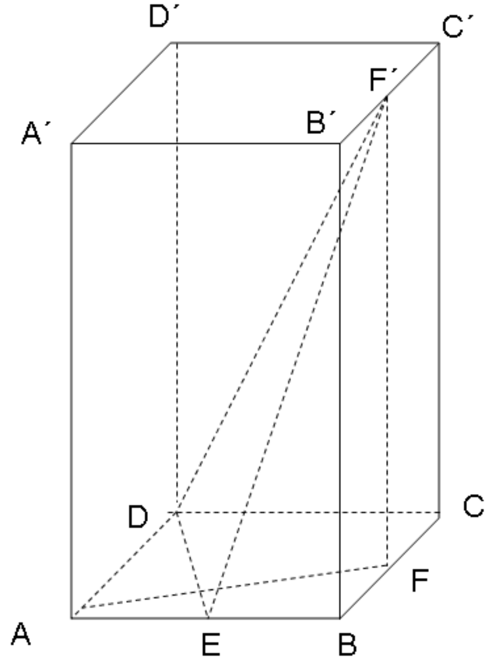
c) Construim $AT \perp BM$, $T \in BM$; cum $SA \perp (ABC)$, din teorema celor trei perpendiculare urmează că $ST \perp BM$, deci distan□a de la punctul S la dreapta BM este ST.

Aria triunghiului ABM este jumătate din cea a pătratului ABCD,

iar $BM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ .... 1 p

$\Rightarrow AT = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ .... 1 p

4. (7puncte)



a) Fie DE$\cap$ AF ={M} ΔAED≡ΔBFA (CC) .... 1 p

$\Rightarrow$ <AED≡ < BFA. Atunci în ΔAME:

m< (EAM)+ m< (AEM)= m< (BAF)+ m< (BFA) = 90 *o*

Rezultă că m <(AME)= 90° , deci AF$\perp$ *DE* .... 1 p

b) FF’ $\perp$ (ABCD), MF$\perp$ DE (cf. punctului a)) ; MF, DE $\subset$(ABCD) $\Rightarrow$F’M$\perp$ DE, deci unghiului plan corespunzător unghiului diedru este <F’MF .... 1 p

În triunghiul ΔDAE aplicăm teorema lui Pitagora $\Rightarrow$ DE=$3\sqrt{5}$

AM$\perp$DE$\Rightarrow$ $AM = \dfrac{AD \cdot AE}{DE} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ .... 1 p

Atunci MF=AF-AM=$\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

În triunghiul F`FM: tg($\angle$F`FM)= $\dfrac{F'F}{MF}$ $=\sqrt{5}$ …………….1p

c) Pe semidreapta (AB luăm N astfel încât BN=BF.

$\Delta PBN \equiv \Delta PBF(C.C) \Rightarrow PN = PF(1)$

Perimetrul triunghiului A`PF este minim $\Leftrightarrow$ A`P+PF+ A`F este minimă.

Cum A`F=constant perimetrul este minim $\Leftrightarrow$ A`P+PF este minim $\Leftrightarrow$ A`P+PN este minim $\Leftrightarrow$ A`, P, N sunt coliniare. .... 1 p

$PB \parallel \mathrm{AA}' \Rightarrow \quad \Delta NPB \sim \Delta NA'A \Rightarrow \dfrac{PB}{AA'} = \dfrac{BN}{NA} \Rightarrow \mathrm{PB}=3\mathrm{cm}$ .... 1 p

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9 FEBRUARIE 2013
Clasa a VIII-a

Subiectul 1.

Rezolvati ecuatia: $(x + y)^2 - 2(x - 2)(y + 1) + 1 = 0$

RMI Constanta nr 1/2011- Prof Vasile Tarciniu ,Odobesti

Subiectul 2.

a)Arătați că $\sqrt{7^{2011} + 2009}$ nu este număr rațional;
b) Aflați $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $9 \mid (46^{2012} - 64^{n})$.

prof. Toma David

Subiectul 3.

Aratati ca numarul $13^n + 7^n - 2$ este divizibil cu 9,oricare ar fi n numar natural.

Vasile Tarciniu,Odobesti,Vrancea - GM 7-8-9/2012

Subiectul 4.

În triunghiul *ABC*, *AB* =26 *cm*, *BC*=40 *cm*, *AC*=42 *cm* şi $D \in (AC)$ astfel, încât $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$.
Dacă *DE* este perpendicular pe planul (*ABC*) şi *DE* =12 *cm*, calculați distanța de la punctul *E* la dreapta *BC*.

prof. Toma David

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul 1.

Ecuatia poate lua forma:

$x^2 + 2xy + y^2 - 2(xy + x - 2y - 2) + 1 = 0$ …………………………………………..2p

$x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - 2x + 4y + 4 + 1 = 0$ ……………………………………………1p

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$ ……………………………………………………..1p

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$ ……………………………………………………………...1p

$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ 1p

si $(y + 2)^2 = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$ ……………………………………………1p

Subiectul 2.

a) Observă $7^{2011} + 2009 = (7^4)^{502} \cdot 7^3 + 2009$ ………………………… 2 p

$u(7^4)^{502} = 1$ ……………………………………………………………………1p

$u\left[(7^4)^{502} \cdot 7^3 + 2009\right] = 2 \Rightarrow \sqrt{7^{2011} + 2009}$ nu este număr rațional ……….1p

b) $46^{2012} - 64^n = (46^{2012} - 1) + (1 - 64^n)$ ……………………………………………………1p

$(46^{2012} - 1)$ div. cu $46 - 1$, deci cu 9 ………………………………………………1p

$1 - 64^n$ div. cu $1 - 64$, deci cu 9; deci pt. orice $n \in \mathbf{N}$. ……………………………..1p

Subiectul 3.

Notam $N = 13^n + 7^n - 2$

1) $n = 3k \Rightarrow N = 13^{3k} + 7^{3k} - 2 = (2197^k - 1) + (343^k - 1)$ ……………………………1p

$N = (2197 - 1)a + (343 - 1)b = 2196a + 342b = 9(244a + 38b) \Rightarrow N \vdots 9$ ……………..1p

2) $n = 3k+1 \Rightarrow N = 13^{3k+1} + 7^{3k+1} - 2 = 13 \cdot 2197^k + 7 \cdot 343^k - 2$ ………………………1p

$N = (13 \cdot 2197^k - 13) + (7 \cdot 343^k - 7) + 18$ ……………………………………………..1p

$N = 13(2197 - 1)a + 7(343 - 1)b + 18 = 9(13 \cdot 244a + 7 \cdot 38b + 2) \Rightarrow N \vdots 9$ ……… 1p

3) $n = 3k+2 \Rightarrow N = 13^{3k+2} + 7^{3k+2} - 2 = 169 \cdot 2197^k + 49 \cdot 343^k - 2$

$N = (169 \cdot 2197^k - 169) + (49 \cdot 343^k - 49) + 216$ ………………………………………..1p

$N = 169(2197 - 1)a + 49(343 - 1)b + 216$

$N = 169 \cdot 2196a + 49 \cdot 342b + 216 = 9(169 \cdot 244a + 49 \cdot 38b + 24) \Rightarrow N \vdots 9$ …………...1p

Deci $N \vdots 9$,oricare ar fi n numar natural.

Subiectul 4.

DE $\perp$ (ABC) si DF $\perp$ BC $\Rightarrow$ EF $\perp$ BC $\Rightarrow$ d(E,BC) = EF...1p

A_{ABC} = 504 cm^2 ………………………………………………………………1p

Fie AG $\perp$ BC $\Rightarrow$ AG = 25,2 cm 1p

$\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ AD = 18 cm , DC = 24 cm ……………………………………........1p

Δ DFC $\sim$ Δ AGC DF = 14,4 cm 1p

DE $\perp$ (ABC) $\Rightarrow$ DE $\perp$ DF $\Rightarrow$ Δ EDF dr m($\sphericalangle$ EDF) =90° 1p

EF = $\frac{12\sqrt{61}}{5}$ cm 1p