OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. Arătaţi că numărul $a = 2n^2 + \left[\sqrt{4n^2+n}\right] + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

2. În dreptunghiul $ABCD$, fie $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = 4$ şi $\frac{CN}{NB} = 2$. Notăm $\{P\} = DN \cap CM$. Arătaţi că $17\overrightarrow{AP} = 15\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AD}$.

Ioana Maşca

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia r. Să se demonstreze

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_{2n}| \geq n|r|, \ \forall\ n \geq 1.$$

Când are loc egalitatea pentru un număr natural nenul n, fixat?

Cătălin Ciupală

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Să se demonstreze că dacă $ab - 1 = bc = ac + 1 \in \mathbb{N}$, atunci $abc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a IX-a

1. Arătaţi că numărul $a = 2n^2 + \left[\sqrt{4n^2+n}\right] + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

Soluţie.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $(2n)^2 < 4n^2 + n < (2n+1)^2$. Rezultă $\left[\sqrt{4n^2+n}\right] = 2n$. **(4p)**
Deci $a = 2n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n+1)^2$. **(3p)**

2. În dreptunghiul $ABCD$, fie $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = 4$ şi $\frac{CN}{NB} = 2$. Notăm $\{P\} = DN \cap CM$. Arătaţi că $17\overrightarrow{AP} = 15\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AD}$.

Ioana Maşca

Soluţie.
Notăm $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Avem $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{a} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$.
Vectorii $\overrightarrow{DP}$ şi $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, deci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DN}$.
Rezultă $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{a} - \dfrac{2\lambda}{3}\overrightarrow{b}$.
Apoi $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{5}\overrightarrow{a}$. Deoarece vectorii $\overrightarrow{CP}$ şi $\overrightarrow{CM}$ sunt coliniari, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{CM}$. Atunci $(\lambda - 1)\overrightarrow{a} - \dfrac{2\lambda}{3}\overrightarrow{b} = \mu\left(-\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{5}\overrightarrow{a}\right)$, de unde $\left(\lambda - 1 + \dfrac{\mu}{5}\right)\overrightarrow{a} + \left(-\dfrac{2\lambda}{3} + \mu\right)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. **(4p)**
Deoarece $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt necoliniari, obţinem sistemul $\begin{cases} \lambda - 1 + \mu/5 = 0 \\ -2\lambda/3 + \mu = 0 \end{cases}$, de unde $\begin{cases} \lambda = \frac{15}{17} \\ \mu = \frac{10}{17} \end{cases}$. Rezultă $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{b} + \dfrac{15}{17}\left(\overrightarrow{a} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) = \dfrac{15}{17}\overrightarrow{a} + \dfrac{7}{17}\overrightarrow{b}$.
Ca urmare, $17\overrightarrow{AP} = 15\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AD}$. **(3p)**

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia r. Să se demonstreze

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_{2n}| \geq n|r|, \ \forall\ n \geq 1.$$

Când are loc egalitatea pentru un număr natural nenul n, fixat?

Cătălin Ciupală

Soluţie.
Folosind proprietăţile modulului, avem

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_{2n}| = |a_1| + |-a_2| + \cdots + |a_{2n-1}| + |-a_{2n}| \geq$$

$$\geq |a_1 - a_2 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}| = |-nr| = n|r|,$$

pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. **(4p)**
Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixat.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1, -a_2, \cdots, a_{2n-1}, -a_{2n}$ au acelaşi semn.
Dacă $n = 1$, atunci a_1 şi a_2 au semne contrare, deci $a_1(a_1 + r) \leq 0$. **(1p)**.
Dacă $n \geq 2$, atunci, din $a_1a_2 \leq 0,\ a_2a_3 \leq 0, a_3a_4 \leq 0$, obţinem $a_1 = r = 0$. **(2p)**.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Să se demonstreze că dacă $ab - 1 = bc = ac + 1 \in \mathbb{N}$, atunci $abc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Romeo Ilie

Soluţie.
Fie $ab - 1 = bc = ac + 1 = k \in \mathbb{N}$. Atunci, $ab = k + 1$, $ac = k - 1$, $bc = k$ şi $(abc)^2 = k(k^2 - 1)$, iar $abc = \pm\sqrt{k(k^2 - 1)}$. **(3p)**
Presupunem prin absurd că $abc \in \mathbb{Q}^*$. Atunci, $k(k^2 - 1)$ este pătrat perfect (nenul), deci $k \geq 2$. Cum $(k, k^2 - 1) = 1$, rezultă că numerele naturale k şi $k^2 - 1$ sunt pătrate perfecte. **(2p)**
Deoarece $k > 1$, avem $(k - 1)^2 < k^2 - 1 < k^2$, deci $k^2 - 1$ nu este pătrat perfect, contradicţie. Prin urmare, $abc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **(2p)**