INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a VII-a

1. (7p) Se consideră mulţimile $A=\left\{n\in N \middle| \sqrt{50-5\sqrt{n+5}}\in N\right\}$ şi $B=\left\{\overline{ab} \middle| \sqrt{\overline{ab}-ab}=\frac{n}{5}, n\in A\right\}$.

Determinaţi mulţimile A şi B.

Simona Dumitrescu

2. (7p) Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d, astfel încât $abcd=1$. Calculaţi

$$E=\frac{7+a}{1+a+ab+abc}+\frac{7+b}{1+b+bc+bcd}+\frac{7+c}{1+c+cd+cda}+\frac{7+d}{1+d+da+dab}.$$

G*M11/2015*

3. Pe laturile $[AD]$ şi $[DC]$ ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale AED şi DFC, astfel încât E este în interiorul pătratului, iar F este în exteriorul pătratului. Demonstraţi că:

(4p) a) punctele B, E şi F sunt coliniare.

(3p) b) punctul E este mijlocul segmentului $[BM]$, unde $\{M\}=BF\cap DC$.

***

4. Punctele A, D, C şi B sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $[AD]\equiv[DC]\equiv[CB]$. Punctul E este exterior dreptei AB, O este mijlocul segmentului $[AB]$, iar F este simetricul punctului E faţă de O. Dacă $FC\cap EB=\{M\}$, $MD\cap AF=\{N\}$ şi $NC\cap EB=\{P\}$, arătaţi că:

(4p) a) $EB=8PB$.

(3p) b) $A_{AFBE}=48A_{CPB}$.

Dan Vulc

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a VII-a

1. $50-5\sqrt{n+5}$ este pătrat perfect şi multiplu de 5, deci $50-5\sqrt{n+5}\in\{0,25\}$ ………………….... **(1p)**

Rezultă $n\in\{20,95\}$, deci $A=\{20,95\}$ ..………….. **(2p)**

$n=95\Rightarrow\overline{ab}-ab=361$, ceea ce este fals ………………………………………….........……. **(0,5p)**

$n=20\Rightarrow\overline{ab}-ab=16$ şi cum $b\neq 10\Rightarrow a=\dfrac{16-b}{10-b}$, $a\in N$ ……………………………..........….. **(1,5p)**

$b\in\{4,7,8,9\}$, deci $B=\{24,37,48,79\}$ ....………………......……………...........… **(2p)**

2. Amplificând al doilea raport cu *a*, al treilea cu *ab* şi al patrulea cu *abc* se obţine:

$$E=\frac{7+a}{1+a+ab+abc}+\frac{(7+b)a}{a+ab+abc+1}+\frac{(7+c)ab}{ab+abc+1+a}+\frac{(7+d)abc}{abc+1+a+ab}$$

.... **(4p)**

$E=8$ .... **(3p)**

3. a) Triunghiul ABE este isoscel cu $m(\angle BAE)=30^0$,

deci $m(\angle AEB)=75^0$ ....**(1,5p)**

Triunghiul DEF este isoscel cu $m(\angle EDF)=90^0$,

deci $m(\angle DEF)=45^0$ ....**(1,5p)**

$m(\angle BEF)=m(\angle AEB)+m(\angle AED)+m(\angle DEF)=180^0$ ....**(1p)**

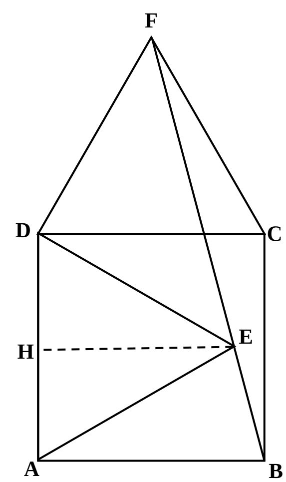
b) Construim înălţimea $[EH]$

în triunghiul echilateral AED ....**(1p)**

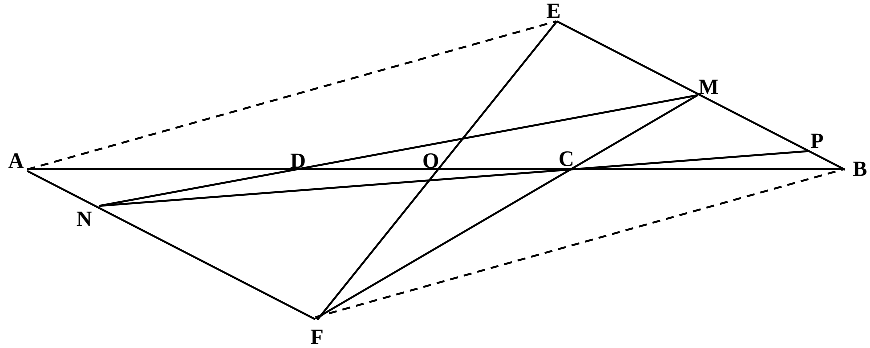
$ABMD$ este trapez, H este mijlocul laturii $[AD]$,

HE este paralelă cu bazele, deci $[HE]$

este linia mijlocie a trapezului ....**(2p)**



4.



a) Deoarece $AO = OB$ şi $FO = OE$ rezultă $AFBE$ paralelogram .... **(1p)**

În triunghiul EFB punctul C este centru de greutate .... **(1p)**

$AN \parallel PB \Rightarrow \Delta PBC \sim \Delta NAC \Rightarrow \frac{PB}{AN} = \frac{1}{2}$ (1) ....

(0,5p)

$AN \parallel MB \Rightarrow \Delta AND \sim \Delta BMD \Rightarrow \frac{AN}{MB} = \frac{1}{2}$ (2) ....

(0,5p)

$[FM]$ este mediană în triunghiul BEF, deci $\frac{MB}{EB} = \frac{1}{2}$ (3) ....

(0,5p)

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă $\frac{PB}{EB} = \frac{1}{8}$ ....

(0,5p)

b) În triunghiul ECB, $\frac{PB}{EB} = \frac{A_{PCB}}{A_{ECB}}$, deci $A_{PCB} = \frac{A_{ECB}}{8}$ (4)

.... **(1p)**

Din proprietăţile centrului de greutate, $A_{ECB} = \frac{A_{EFB}}{3}$ (5)

.... **(1p)**

$\Delta BEF \equiv \Delta AFE \Rightarrow A_{EFB} = \frac{A_{AFBE}}{2}$ (6) ....

(0,5p)

Din (4), (5) şi (6) rezultă $A_{PCB} = \frac{A_{AFBE}}{48}$ ....

(0,5p)