OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Se consideră numerele raţionale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât din oricare patru dintre ele există două care au produsul -1.

a) Daţi un exemplu de 6 astfel de numere;

b) Aflaţi valoarea maximă a lui n.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relaţia $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC şi M mijlocul laturii $[BC]$. Daca N este mijlocul segmentului $[AM\ ]$ şi $BN \cap AC = \{P\}$, determinaţi raportul dintre aria patrulaterului $MCPN$ şi aria triunghiului ABC.

PROBLEMA 4. În triunghiul ABC, fie M mijlocul lui $[BC]$ şi P un punct pe BC, $P \neq M$. Paralela prin P la AC intersectează drepta AM în E, iar paralela prin P la AB intersectează dreapta AM în F. Să se demonstreze că punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Se consideră numerele raţionale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât din oricare patru dintre ele există două care au produsul -1.

a) Daţi un exemplu de 6 astfel de numere;

b) Aflaţi valoarea maximă a lui n.

Barem de corectare.

$(3p)$ *a*) De exemplu, numerele $2, 3, 4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ verifică cerinţele din enunţ; în general, putem lua numerele $a,\ b,\ c,\ -\frac{1}{a},\ -\frac{1}{b},\ -\frac{1}{c}$, unde a, b şi c sunt numere distincte din $\mathbb{Q}^*$.

$(3p)$ *b*) Dacă $n \geq 7$, atunci cel puţin 4 dintre cele n numere au acelaşi semn. Aşadar, în acest caz, există 4 numere dintre care nu putem alege două a căror produs să fie -1.

$(1p)$ Deci, valoarea maximă a lui n este 6.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relaţia $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Din ipoteză, obţinem că $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$.

$(3p)$ Deci $\begin{cases} 2a = b+c \\ 2b = a+c \\ 2c = a+b \end{cases}$, de unde rezultă că $a = b = c$.

Aşadar, avem:

$(1p)$ $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} = \sqrt{\frac{2a}{6a} + \frac{2a}{6a} + \frac{2a}{6a}} = 1 \in \mathbb{Q}$

$(1p)$ $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC şi M mijlocul laturii $[BC]$. Daca N este mijlocul segmentului $[AM\ ]$ şi $BN \cap AC = \{P\}$, determinaţi raportul dintre aria patrulaterului $MCPN$ şi aria triunghiului ABC.

Barem de corectare. Fie $MR \parallel BP$ $(R \in PC)$ şi $S = A_{ANP}$.

(1p) Deoarece $MR = \dfrac{BP}{2}$,

(2p) obţinem că $NP = \dfrac{MR}{2} = \dfrac{BP}{4}$, de unde $A_{ABN} = 3A_{ANP} = 3S$.

(1p) Dar cum $A_{ABN} = A_{BMN} = 3S$

(1p) şi $A_{ABM} = A_{AMC} = 6S$, rezultă că $A_{ABC} = 12S$

(1p) şi $A_{MCPN} = A_{AMC} - A_{ANP} = 5S$.

(1p) Aşadar, $\dfrac{A_{MCPN}}{A_{ABC}} = \dfrac{5}{12}$.

PROBLEMA 4. În triunghiul ABC, fie M mijlocul lui $[BC]$ şi P un punct pe BC, $P \neq M$. Paralela prin P la AC intersectează drepta AM în E, iar paralela prin P la AB intersectează dreapta AM în F. Să se demonstreze că punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

Barem de corectare.

(1p) Fie $FD \parallel AC,\ D \in BC$.

(1p) Deoarece $PF \parallel AB$, rezultă că $\dfrac{MP}{MB} = \dfrac{MF}{MA}$,

(1p) iar din $FD \parallel AC$ rezultă că $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MF}{MA}$

(1p) de unde, $MP = MD$.

(2p) Deoarece $\Delta PME \equiv \Delta DMF$, obţinem $FM = ME$,

(1p) adică, punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.