OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa 21.02.2016

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie $f:R\to R, f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

a) Calculaţi $\int e^x f(x)dx$.

b) Determinaţi primitiva F a lui f cu F(0) = 1.

c) Calculaţi $\int \left(f(x)+f(-x)\right)dx$.

GMB

SUBIECTUL 2

Fie $(G,\circ)$ şi $(G,*)$ două grupuri definite pe aceeaşi mulţime G, care au acelaşi element neutru şi care verifică $x*y=(x\circ x)\circ(x\circ y), (\forall)x,y\in G$. Să se arate că cele două legi de compoziţie coincid şi că grupul definit este comutativ.

***

SUBIECTUL 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $f:G\to G$ o funcţie cu proprietatea : $f(x\cdot f(y))=y\cdot f(x), \forall x,y\in G$.

a) Arătaţi că f este bijectivă şi că $f(x\cdot y)=f(y)\cdot f(x), \forall x,y\in G$.

b) Daţi un exemplu de funcţie f care verifică proprietatea din enunţ.

prof. Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

Să se arate că $\int_1^n [\log_2 x]dx = n[\log_2 n]-2^{[\log_2 n]+1}+2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

prof. Constantin Caragea

Notă:
Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa 21.02.2016

Clasa a XII-a

Barem de corectare şi notare

SUBIECTUL 1

a) Cu schimbarea de variabilă $t = e^x$ obţinem $\int e^x f(x)dx = arctg(e^x) + C$ **2p**

b) Cu schimbarea de variabilă $t = e^x$ şi $\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{e^{3x}+e^x}dx$, calculăm

$\int \frac{dt}{t^3+t} = \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$, revenind în substituţie avem $\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx = \ln(e^x) - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$, cum

$F(0) = 1$ avem $c = 1 + \ln\sqrt{2}$ ....**3p**. Am folosit că $\frac{1}{t^3+t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$.

c) Avem succesiv $\int\left(\frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{e^{-2x}+1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx = \int 1dx = x + C$ **2p**

SUBIECTUL 2

Dacă alegem $y = e \Rightarrow \mathrm{x} * \mathrm{e} = (x \circ x) \circ (x \circ e), x = (x \circ x) \circ x, \forall x \in G$ **2p**

deci $x \circ x = e, \forall x \in G$ **2p**

Obţinem că $\mathrm{x} * \mathrm{y} = \mathrm{e} \circ (\mathrm{x} \circ \mathrm{y}) = \mathrm{x} \circ \mathrm{y}, \forall x, y \in G$, deci legile coincid **1p**

Cum grupul are proprietatea $\mathrm{x} \circ \mathrm{x} = \mathrm{e}, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{G}$ rezultă comutativitatea. **2p**

SUBIECTUL 3

a) Pentru $x = e$, element neutru avem $f(f(y)) = y \cdot f(e), \forall y \in G$, dar $g : G \to G, g(y) = y \cdot a$ este bijectivă pentru a din G, avem că $f \circ f$ este bijectivă şi obţinem şi f bijectivă...**2p**

Pentru $y = e \Rightarrow f(f(e)) = f(e) \Rightarrow (inj) f(e) = e \Rightarrow f(f(y)) = y, \forall y \in G \Rightarrow f \circ f = 1_G$ **2p**

Dacă în ipoteză $y \to f(y) \Rightarrow f\left(x \cdot f\left(f(y)\right)\right) = f(y) \cdot f(x) \Rightarrow f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x), \forall x, y \in G$ **2p**

b) exemplu $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ verifică. **1p**

SUBIECTUL 4

Scriem $I = \int_1^n [\log_2 x]dx = \int_1^2 [\log_2 x]dx + \int_2^{2^2} [\log_2 x]dx + \ldots + \int_{2^{k-1}}^{2^k} [\log_2 x]dx + \int_{2^k}^n [\log_2 x]dx$, unde $k \in N$ şi

$2^k \le n < 2^{k+1}$, $k = [\log_2 n]$...**3p**.

Obţinem că $I = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + (k-1) \cdot 2^{k-1} + k \cdot (n - 2^k)$ **2p**,

$I = n[\log_2 n] - 2^{[\log_2 n]+1} + 2$, folosind eventual

$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \left(x + x^2 + \ldots + x^n\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, $x \ne 1$................**2p**

<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .