OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A XII-A

Programa M1

1.) Determinaţi părţile stabile finite ale mulţimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$ faţă de operaţia „o” definită prin $xoy = xy - 2014x - 2014y + 2014^2 + 2014,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

2.) Se dau matricea $A_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ şi mulţimea $H = \left\{ A_a^n \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a.) Determinaţi cea mai mică valoare pozitivă a numărului $a \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea H are exact 12 elemente.

b.) Pentru a determinat mai înainte aflaţi elementele grupului abelian $(H,\cdot)$ care sunt egale cu inversele lor.

3.) Să se calculeze :

a.) $\int \arcsin(\sin x)dx$, $x \in (0, \pi)$.

b.) $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2}dx,$ (x>0).

4.) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $f^3(x) + 3^{f(x)} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.
Timp de lucru 3 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XII-A

Programa M1

1.	**Din oficiu**	**1p**
	Dacă H este o parte stabilă finită a lui Z, atunci există a= minH şi b= maxH.	**2p**
	Presupunând că b>2015, rezultă b-2014 > 1 de unde prin înmulţire cu b-2014 avem $(b–2014)^2>b$-2014 echivalent cu $(b–2014)^2+2014, >b$ adică $bob>b$, contradicţie cu b= maxH, deci $b\leq 2015$.	**2p**
	Presupunând că a<2013 avem a-2014<-1, radicând la pătrat obţinem $(a\text{-}2014)^2>1$ de unde ajungem la $(a\text{-}2014)^2+2014>2015$, adică $aoa>b$, contradicţie cu b= maxH, deci $a\geq 2013$.	**2p**
	Rezultă că H poate conţine numai elementele 2013, 2014, 2015 şi poate fi una din mulţimile {2013}, {2014}, {2015}, {2013,2014}, {2013, 2015}, {2014, 2015}, {2013, 2014, 2015}.	**1p**
	Prin calcul direct se obţin submulţimile:{2014}, {2015}, {2013, 2015}, {2014, 2015}, {2013, 2014 }, {2013, 2014, 2015}.	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Cu metoda inducţiei matematice se poate demonstra egalitatea $A_a^n = A_{na}$.	**3p**
	Datorită periodicităţii funcţiilor sinus şi cosinus rezultă că pentru $a=\frac{\pi}{6}$ avem $A_{\frac{\pi}{6}}^{12} = A_{2\pi} = A_0 = I_2$ şi $A_{\frac{\pi}{6}}^{13} = A_{\frac{\pi}{6}}$.	**3p**
b.)	Deoarece $\left(A_{\frac{\pi}{6}}^{n}\right)^{-1} = A_{\frac{\pi}{6}}^{12-n}$ în grupul abelian $(H,\cdot)$ sunt două elemete egale cu inversele lor, anume $A_{\frac{\pi}{6}}^{12} = A_{2\pi} = A_0 = I_2$ şi $A_{\frac{\pi}{6}}^{6} = A_{\pi}$.	**3p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Avem relaţia $\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	**1p**
	Din această relaţie pentru x$\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ rezultă $\pi - x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi astfel $\arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.	**2p**
	După integrare avem $\int \arcsin(\sin x)dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+c, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi x-\frac{x^2}{2}+k, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$.	**1p**

	Impunând continuitatea, obţinem în final $\int \arcsin(\sin x)dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+c, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi x-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}+c, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$.	**1p**
b.)	$x(x+1)(x+2)(x+3)+2=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+2=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1+1=(x^2+3x+1)^2+1$	**2p**
	Derivata lui x^2+3x+1 este $2x+3$	**1p**
	$\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2}dx = \int \frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(x^2+3x+1\right)^2+1}dx = \text{arctg}(x^2+3x+1)+c$	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Relaţia $f^3(x)+3^{f(x)}=x, \forall x\in R$ se transcrie în $g(f(x))=x, \forall x\in R$, unde g este funcţia continuă definită prin $g(x)=x^3+3^x, \forall x\in R$.	**2p**
	Cum $g^{/}(x) = 3x^2+3^x\ln 3>0, \forall x\in R$, rezultă că g este strict crescătoare, deci injectivă.	**2p**
	Deoarece $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty, \lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ şi din continuitatea lui g deducem că g este surjectivă.	**3p**
	Prin urmare g este bijectivă, deci şi inversabilă, $f=g^{-1}$, de unde rezultă că f este continuă şi prin urmare are primitivă.	**2p**