1. Arătați că există o singură funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface egalitatea

$$f^2(x+y)+f^2(x-y)=f^2(x)+y^2f^2\left(\frac{x}{y}\right),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $y\in\mathbb{R}^*$.

Marchitan Gheorghe, Suceava

Rezolvare. Luând $y=1$ şi apoi $y=-1$ obținem

$$\left.\begin{array}{r} f^2(x+1)+f^2(x-1)=f^2(x)+f^2(x), \\ f^2(x-1)+f^2(x+1)=f^2(x)+f^2(-x), \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow (1)\ f^2(x)=f^2(-x), \forall x\in\mathbb{R}. (1).$$

Luând $x=0$ în egalitatea inițială, avem $f^2(y)+f^2(-y)=f^2(0)(1+y^2), \forall y\in\mathbb{R}^*$

şi, ținând seama de (1), avem $f^2(x)=\dfrac{f^2(0)}{2}\cdot(1+x^2), \forall x\in\mathbb{R}^*$. Pentru $f(0)\neq 0$, avem

$$f^2(x+y)+f^2(x-y)=f^2(0)\cdot(1+x^2+y^2) \text{ şi } f^2(x)+y^2f^2\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f^2(0)}{2}\cdot(1+2x^2+y^2),$$

deci egalitatea dată nu este verificată. Urmează $f(0)=0$ şi deci $f(x)=0, (\forall) x\in\mathbb{R}^*$.

2. Să se determine numerele reale x ştiind că şirul $u_n = [nx]$, $\forall n \geq 1$, este progresie aritmetică.

Mihai Piticari, Dan Popescu, Suceava

Rezolvare. Evident $(u_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere întregi .

$u_1 = [x]$, deci rația r este număr întreg. Avem $u_n = [x] + (n-1)r, \forall n \geq 1$. Deci $[nx] = [x] + (n-1)r, \forall n \geq 1$ sau $nx - \{xn\} = [x] + (n-1)r$ sau $n(r-x) = r - \{xn\} - [x]$. Din ultima relație rezultă $r - [x] - 1 < n(r-x) \leq r - [x], \forall n \geq 1$.

Dacă $r > x \Rightarrow n < \dfrac{r-[x]}{r-x}, \forall n \geq 1$, absurd. Cazul $r < x$ se tratează la fel.

Deci $r = x$, adică $x \in \mathbb{Z}$.

3. Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $|1+x|+|1+y|+|1+xy| \geq |x|+|y|$.

Ion Bursuc, Suceava

Rezolvare. Inegalitatea din enunț se scrie sub forma: $\left(|1+x|+|1+y|+|1+xy|\right)^2 \geq \left(|x|+|y|\right)^2$, echivalent cu

$$1+2x+x^2+1+2y+y^2+1+2xy+x^2y^2+2\left|(1+x)(1+y)\right|+2\left|(1+xy)(1+y)\right|$$

$$+2\left|(1+x)(1+xy)\right| \geq x^2+y^2+2|xy|,$$ sau

$$2(1+x)(1+y)+2\left|(1+x)(1+y)\right|+\left(1-|xy|\right)^2+2\left|(1+y)(1+xy)\right|+2\left|(1+x)(1+xy)\right| \geq 0$$

ceea ce este adevărat.

4. Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD ale patrulaterului convex $ABCD$ şi fie I_1, I_2, I_3, I_4 respectiv centrele cercurilor înscrise ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Să se demonstreze că patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$tg\left(\frac{\measuredangle AOB}{2}\right)=\frac{(AB+BO+OA)(CD+DO+OC)}{(BC+CO+OB)(DA+AO+OD)}.$$

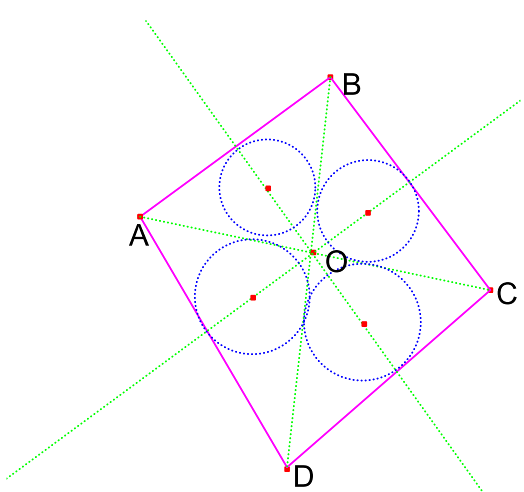
Cătălin Țigăeru, Suceava

Rezolvare. Se justifică imediat faptul că tripletele de puncte I_1, O, I_3 şi I_2, O, I_4 sunt coliniare şi că dreptele I_1I_3 şi I_2I_4 sunt perpendiculare; dacă presupunem că patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil, atunci va rezulta că $(*)\ I_1O_2 \cdot OI_3 = I_2O \cdot IO_4$.

Notăm $m(\measuredangle AOB)=\alpha$ şi cu $r_i, i\in\{1,2,3,4\}$ respectiv razele cercurilor înscrise ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA; atunci

$$OI_i = r_i \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\ i\in\{1,3\},\ OI_i = r_i\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = r_i\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\ i\in\{2,4\}.$$

Înlocuind în $(*)$, obținem $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2\cdot r_4}{r_1\cdot r_3}$. Dacă notăm cu $S_i, p_i,\ i\in\{1,2,3,4\}$ respectiv ariile şi semiperimetrele triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA, atunci, înlocuind $r_i=\frac{S_i}{p_i}$, obținem $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2r_4}{r_1r_3}=\frac{S_2S_4}{S_1S_3}\cdot\frac{p_1p_3}{p_2p_4}$; dar, dacă notăm cu h_A şi h_C lungimile perpendicularelor duse respectiv din vârfurile A şi C pe BD, atunci $\frac{S_2}{S_1}=\frac{h_C}{h_A}, \frac{S_4}{S_3}=\frac{h_A}{h_C}$, deci $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{p_1p_3}{p_2p_4}$, ceea ce conduce la concluzia directei. Reciproc, dacă presupunem că relația din enunț este valabilă, atunci, deoarece tripletele de puncte I_1, O, I_3 şi I_2, O, I_4 sunt oricum coliniare, rezultă că relația $(*)$ asigură conciclicitatea punctelor I_1, I_2, I_3, I_4. Cu aceasta, problema este rezolvată.



1. Fie $p \in N^*$. Atunci:

1) $\left|1+z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

2) $\left|1-z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

3) $\left|1+z^p+z^{2p}\right| \geq \left|1-|z|\right|^{2p}, \forall z \in \mathbb{C}.$

Rezolvare. Vom arăta, mai întâi, că dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $\left|a^p-b^p\right| \geq \left||a|-|b|\right|^p, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Pentru aceasta, utilizăm formula

$$a^p-b^p=(a-b)(a-\omega b)\left(a-\omega^2 b\right)\ldots\left(a-\omega^{p-1} b\right),$$

unde $\omega^p=1, \omega \neq 1$. Atunci:

$$\left|a^p-b^p\right|=|a-b||a-\omega b|\left|a-\omega^2 b\right|\ldots\left|a-\omega^{p-1} b\right| \geq \left||a|-|b|\right|^p.$$

Am ținut cont că $|x-y| \geq \left||x|-|y|\right|$.

De aici, pentru $a=1$ şi $b=z$, se obține 2).

Pentru $a=1$ şi $b=\lambda z$, cu $\lambda^p=-1$, se obține 1).

3) Dacă $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$,

$$\left|1+z^p+z^{2p}\right|=\left|1-\varepsilon z^p\right| \cdot \left|1-\varepsilon^2 z^p\right|=\left|\varepsilon^2-z^p\right| \cdot \left|\varepsilon-z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p \cdot \left|1-|z|\right|^p=\left|1-|z|\right|^{2p}.$$

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari,
C-lung Moldovenesc

2. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 6$. Să se demonstreze că

$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc} + a\right) + \log_b\left(\sqrt[3]{ca} + b\right) + \log_c\left(\sqrt[3]{ab} + c\right) \geq \frac{11}{2}.$$

Rezolvare. Din $\sqrt[3]{bc} + a \geq 2\sqrt{\sqrt[3]{bc} \cdot a}$ şi celelalte deducem şirul de inegalităţi:

$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc} + a\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\log_a b + \frac{1}{3}\log_a c + 2\log_a 2 + 1\right),$$

$$\log_b\left(\sqrt[3]{ca} + b\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\log_b c + \frac{1}{3}\log_b a + 2\log_b 2 + 1\right),$$

$$\log_c\left(\sqrt[3]{ab} + c\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\log_c a + \frac{1}{3}\log_c b + 2\log_c 2 + 1\right),$$

de unde, după însumare şi după $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 3$,

$\log_a c + \log_b a + \log_c b \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\log_a c \cdot \log_b a \cdot \log_c b} = 3$, ajungem la:

$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc} + a\right) + \log_b\left(\sqrt[3]{ca} + b\right) + \log_c\left(\sqrt[3]{ab} + c\right) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_2 c}.$$

Deoarece $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\log_2 x}$ este semiconvexă, fiind răsturnata unei funcţii semiconcave, strict crescătoare şi strict pozitive, rezultă că

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_2 c} \geq \frac{3}{\log_2 \dfrac{a+b+c}{3}} = 3.$$

S-a ajuns astfel la

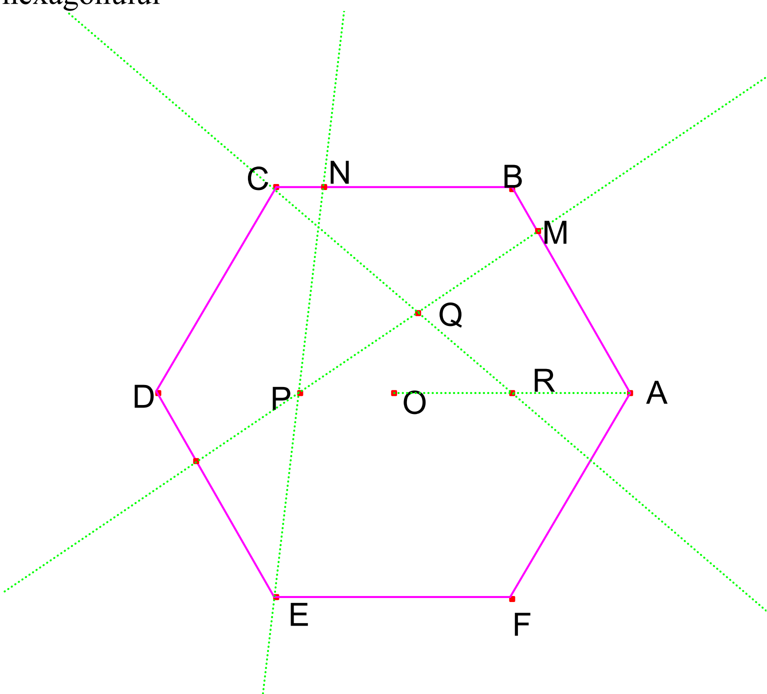
$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc} + a\right) + \log_b\left(\sqrt[3]{ca} + b\right) + \log_c\left(\sqrt[3]{ab} + c\right) \geq \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2},$$

ceea ce încheie rezolvarea problemei.

Angela Ţigăeru
Suceava

3. Considerăm hexagonul regulat *ABCDEF* de centru *O* şi fie $M \in (AB), N \in (BC)$ două puncte astfel încât *MB* = *NC*. Dacă *P* este mijlocul segmentului *NE*, *Q* este mijlocul segmentului *MP* şi *R* este mijlocul segmentului *OA*, să se demonstreze că punctele *C*, *Q* şi R sunt coliniare.

Rezolvare. În planul complex putem considera, fără a restrânge generalitatea, hexagonul regulat înscris în cercul centrat în origine, de rază 1, vârfurile corespunzând rădăcinilor de ordinul 6 ale unității. Prin notația $M(m)$ se va înțelege că numărul complex m este afixul punctului din plan *M*. Dacă $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci afixele vârfurilor hexagonului



regulat sunt $A(1), B(\alpha), C(\alpha^2), D(-1), E(-\alpha), F(-\alpha^2)$. Pentru punctele $M(m), N(n)$ vom avea: există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $m = (1-\lambda).1 + \lambda.\alpha,\ n = (1-\lambda).\alpha + \lambda.\alpha^2$; pentru $P(p), Q(q)$ şi $R(r)$ vom avea: $r = \frac{1}{2}$ şi

$$p = \frac{-\alpha + n}{2} = \frac{-\alpha + (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha^2}{2} = \frac{\lambda(\alpha^2 - \alpha)}{2} = -\frac{\lambda}{2}; q = \frac{p+m}{2} = \frac{-\frac{\lambda}{2} + (1-\lambda) + \lambda\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3\lambda}{4} + \frac{\lambda\alpha}{2}.$$

De aici deducem : $\frac{r-q}{r-c} = \frac{\frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{2} - i\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}}{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\lambda}{2} \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că *C*, *Q*, *R* sunt coliniare.

Cătălin Țigăeru
Suceava

4. Arătați că, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, fracția $\dfrac{\left(C_{n+1}^{n-1}\right)!}{\prod_{k=1}^{n} k!}$ este număr natural.

Silviu Boga
Suceava

Rezolvare. $C_{n+1}^{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\ldots+n$ şi atunci fracția se scrie $\dfrac{(1+2+3+\ldots+n)!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot n!}$, dar

$$\frac{(1+2+3+\ldots+n)!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot n!} = \frac{(1+2+3+\ldots+n)!}{n!\cdot(1+2+3+\ldots+(n-1))!}\cdot\frac{(1+2+3+\ldots+(n-1))!}{(n-1)!\cdot(1+2+3+\ldots+(n-2))!}\cdot\ldots\cdot\frac{(1+2)!}{2!\cdot 1!} =$$

$$= C_{1+2+\ldots+n}^{n}\cdot C_{1+2+\ldots+(n-1)}^{n-1}\cdot C_{1+2+\ldots+(n-2)}^{n-2}\cdot\ldots\cdot C_{1+2}^{2} \in \mathbb{N}$$

1. Să se rezolve, în $\mathfrak{M}_3(\mathbb{N})$, unde $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale, ecuația $A^3 = I_3$.

Rezolvare. Din ipoteză, deducem că $\det(A)=1$, ceea ce, coroborat cu ecuația caracteristică a matricei *A*, conduce la $tr(A)A^2 = tr(A^*)A$. Dacă $tr(A)\neq 0$, se obține $tr(A^*)\neq 0$ şi că $A=\lambda I_3$, de unde rezultă soluția $A_1 = I_3$. Dacă $(*)\, tr(A)=0$, atunci şi $(**)\, tr(A^*)=0$; dacă punem $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$, atunci condițiile $(*)$ şi $(**)$ conduc respectiv la $a_1 = a_5 = a_9 = 0$ şi $a_3a_7 + a_2a_4 + a_6a_8 = 0$, unde $a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8 \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $a_3a_7 = a_2a_4 = a_6a_8 = 0$. Observăm că, dacă $a_4 = a_7 = 0$ sau $a_2 = a_3 = 0$, atunci *A* ar avea o coloană, respectiv o linie nulă, ceea ce contrazice faptul că *A* este inversabilă. De aceea apar situațiile:

(a) $a_4 = 0, a_7 \neq 0$; atunci $a_3 = 0$, deci $a_2 \neq 0$ (altfel prima linie ar fi nulă); mai mult, cum $a_3 = a_9 = 0$, rezultă că $a_6 \neq 0$, deci $a_8 = 0$, ceea ce conduce la următoarea soluție: $A=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 \\ a_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; deducem imediat că $A^3 = a_2a_6a_7I_3$, deci $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) o analiză similară conduce, în cazul $a_2 = 0, a_3 \neq 0$, la soluția $A_3 = {}^tA_2$.

În concluzie, soluția ecuației este $A \in \left\{ I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Cătălin Ţigăeru
Suceava

2. Fie f şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux şi dacă $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-g(x)}{h}$ există şi este finită pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci $f(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare. Deoarece $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-g(x)}{h}$ este finită, rezultă că $\lim\limits_{h\to 0} h\dfrac{f(x+h)-g(x)}{h}=0$, de unde $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x+h)-g(x)\right)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci f are limita finită în orice punct şi, cum are proprietatea lui Darboux, f este continuă în orice punct, deci $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Aşadar $f(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Mihai Piticari,
Câmpulung Moldovenesc

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietățile $AB = A$ şi $BA = B$. Să se arate că matricea $A + B - I_n$ este inversabilă.

Rezolvare. Din $AB = A$ rezultă că $ABA = A^2$. Din $BA = B$ rezultă că $ABA = AB = A$, prin urmare, $A^2 = A$. Analog se arată că $B^2 = B$.
Astfel, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + A + B + B = 2(A+B)$, de unde $(A+B)^2 - 2(A+B)I_n + I_n{}^2 = I_n$ şi atunci $(A+B-I_n)^2 = I_n$, deci $\det(A+B-I_n) = \pm 1$ şi $A+B-I_n$ este inversabilă.

Gheorghe Marchitan,
Suceava

4. Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$ două numere impare. Atunci:

$$\left[\left(a+b+c\right)^n - a^n - b^n - c^n\right]\left[\left(a+b+c\right)^m - a^m - b^m - c^m\right] \geq 0, \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Sorin Rădulescu, Ion Savu, Bucureşti

Rezolvare. Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, definim $f_p\left(x\right) = \left(x+a+b\right)^p - x^p - a^p - b^p$.

Pentru p impar avem $f_p\left(-a\right) = f_p\left(-b\right) = 0$, $f_p^{'}(x) = p(x+a+b)^{p-1} - px^{p-1}, \forall x \in \mathbb{R}$,
$f_p{''}(x) = p(p-1)(x+a+b)^{p-2} - p(p-1)x^{p-2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Dacă p este impar, $f_p{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x+a+b = \pm x,$ deoarece p-1 este par.

Dacă $x+a+b = x \Leftrightarrow a+b=0$, atunci $f_p\left(x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Dacă $x+a+b=-x \Leftrightarrow x = -\dfrac{a+b}{2}$, avem următoarele cazuri:

1) Dacă $a+b=0$, atunci $f_p\left(x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
2) Dacă $a+b>0$, atunci $f_p^{''}(x) > 0$, deci f_p este convexă şi $f_p^{'}$ strict crescătoare $\Rightarrow f_p > 0$ în afara intervalului $\left(-a,-b\right)$ şi $f_p \leq 0,\ \forall x \in \left[-a,-b\right] \Rightarrow f_m\left(x\right) \cdot f_n\left(x\right) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$
3) Dacă $a+b<0 \Rightarrow f_p$ concavă şi $f_p^{'}$ strict descrescătoare $\Rightarrow f_p \leq 0$ în afara intervalului $\left(-a,-b\right)$ şi $f_p \geq 0$ pe $\left[-a,-b\right]$, deci $f_m\left(x\right) \cdot f_n\left(x\right) \geq 0, \left(\forall\right) x \in \mathbb{R}$.

1. Fie funcția $f:\left(\dfrac{2}{\pi};\,+\infty\right)\to\left(0;\,+\infty\right)$, $f(x)=x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$.

a) arătați că este funcție bijectivă;

b) dacă $g:\left(0;\,+\infty\right)\to\left(\dfrac{2}{\pi};\,+\infty\right)$ este inversa funcției f, arătați că şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu

$$x_n=f(n)\cdot\left[\frac{1}{g^2(n)+f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+2f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+3f(n)}+...+\frac{1}{g^2(n)+nf(n)}\right],$$

$(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, este convergent şi determinați limita sa.

Soluție: Se constată imediat functie bijectivă, concavă, cu asimptotă chiar prima bisectoare, deci şi inversa are aceeaşi asimptotă, respectiv $\dfrac{f(x)}{g(x)}<1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, apoi

$$x_n=\frac{f(n)}{g^2(n)}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{f(n)}{g^2(n)}}+\frac{1}{1+2\frac{f(n)}{g^2(n)}}+\frac{1}{1+3\frac{f(n)}{g^2(n)}}+...+\frac{1}{1+n\frac{f(n)}{g^2(n)}}\right],$$ exprimare care identifică $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu un şir de sume integrale convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln 2$.

Silviu Boga,
Suceava

2. Polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ de grad $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, cu proprietatea că $a_{n-k} = a_k$, $\forall k = \overline{0,n}$, are toate rădăcinile de acelaşi modul, iar $a_n \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că polinomul f are toţi coeficienţii reali.

Dan Popescu, Mihai Piticari,
Suceava

Soluție: Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului, atunci $|x_k| = r > 0$, $k = \overline{1,n}$. Atunci $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = r^n = \left|(-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right| = 1$, de unde $r = 1$. Astfel, $\overline{x_k} = \frac{1}{x_k}$, $k = \overline{1,n}$. Atunci, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, iar

$$\overline{f(x)} = \overline{a_n}\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_n - \frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x_1 x \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot x^n \left(x_1 - \frac{1}{x}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_n - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

În fine, polinomul $h = \left(a_n - \overline{a_n}\right) \cdot X^n + \left(a_{n-1} - \overline{a_{n-1}}\right) X^{n-1} + \ldots + \left(a_n - \overline{a_i}\right) X + a_0 - \overline{a_0}$ satisface $h(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, de unde *h=0*, adică $a_k = \overline{a_k}$, $\forall k = \overline{0,n}$.

3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, α . Calculați $\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \left(\frac{a}{a + b \cdot tg^{\alpha} x} + \frac{b}{b + a \cdot tg^{\alpha} x} \right) dx$

Ion Bursuc, Suceava

Rezolvare. Fie $I = \lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \left(\frac{a}{a + b \cdot tg^{\alpha} x} + \frac{b}{b + a \cdot tg^{\alpha} x} \right) dx$.

Fie funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{a + b \cdot tg^{\alpha} x} + \frac{b}{b + a \cdot tg^{\alpha} x}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

şi funcția $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{b \cdot tg^{\alpha} x}{a + btg^{\alpha} x} + \frac{a \cdot tg^{\alpha} x}{b + a \cdot tg^{\alpha} x}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$ cu $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Deoarece f şi g sunt continue pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$. Cum

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dx = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}.$$

4. Să se arate că, dacă un grup finit $(G,\cdot)\subset GL(2,\mathbb{C})$, are proprietatea că există $A,B\in G$ astfel încât $tr(A)=tr(B)=tr(AB)=0$, atunci grupul $(G,\cdot)$ nu este comutativ şi este de ordin par. Să se dea un exemplu de grup cu proprietatea enunțată în text.

Cătălin Țigăeru
Suceava

Rezolvare. Notăm ordinul grupului cu *n*. Să presupunem că există $A,B\in G$ astfel ca $tr(A)=tr(B)=tr(AB)=0$. Din $A^n=B^n=I_2$ rezultă că $\det(A)=\varepsilon_1, \det(B)=\varepsilon_2$, unde $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in U_n(\mathbb{C})$, de unde deducem relațiile $A^2=-\varepsilon_1\cdot I_2,\ B^2=-\varepsilon_2\cdot I_2$, care conduc la $A^2B^2=\varepsilon_1\varepsilon_2 I_2$. Deoarece $tr(AB)=0$ şi $\det(AB)=\varepsilon_1\varepsilon_2$, rezultă că $(AB)^2=-\varepsilon_1\varepsilon_2 I_2$. Egalând cele două relații şi simplificând la stânga şi la dreapta obținem $AB=-BA$. Dacă $AB=BA$,
s-ar deduce că $AB=0_2$, ceea ce este fals; în concluzie, $AB\neq BA$, deci grupul nu este comutativ. Demonstrăm că *n* este par: să presupunem că $n=2k+1$, pentru $k\in\mathbb{N}^*$; deoarece $tr(A)=0$, deducem $\left.\begin{cases} A^{2k+1}=\left(A^2\right)^k\cdot A=\left(-\varepsilon I_2\right)^k\cdot A=(-\varepsilon)^k\cdot A \\ I_2=A^{2k+1}\end{cases}\right| \Rightarrow (-\varepsilon)^k\cdot A=I_2$, ceea ce contrazice faptul că $tr(A)=0$. Concluzionăm că *n* este par.

Un exemplu este următorul: dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, atunci $BA=-AB$ şi se verifică faptul că $G=\{I_2, A, B, AB, -I_2, -A, -B, -AB\}$ este un grup necomutativ.

$\cdot$	I_2	A	B	AB	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$
I_2	I_2	A	B	AB	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$
A	A	I_2	AB	B	$-A$	$-I_2$	I_2	$-B$
B	B	$-AB$	$-I_2$	A	$-B$	AB	$-AB$	$-A$
AB	AB	$-B$	$-A$	I_2	$-AB$	B	A	$-I_2$
$-I_2$	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$	I_2	A	B	AB
$-A$	$-A$	$-I_2$	$-AB$	$-B$	A	I_2	AB	B
$-B$	$-B$	AB	I_2	$-A$	B	$-AB$	$-I_2$	A
$-AB$	$-AB$	B	A	$-I_2$	AB	$-B$	$-A$	I_2