BAREM CORECTARE LICEU
Clasa a IX-a

1. Arătați că există o singură funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface egalitatea

$$f^2(x+y)+f^2(x-y)=f^2(x)+y^2f^2\left(\frac{x}{y}\right),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $y\in\mathbb{R}^*$.

Marchitan Gheorghe, Suceava

$x=0\Rightarrow\ f^2(y)+f^2(-y)=f^2(0)(1+y^2),\forall y\in\mathbb{R}^*$ 2p

$y=1$ şi $y=-1$ obține $f^2(x)=f^2(-x),\forall x\in\mathbb{R}$. 3p

Finalizare..2p

2. Să se determine numerele reale *x* ştiind că şirul $u_n=[nx]$, $\forall n\geq 1$, este progresie aritmetică.

Mihai Piticari, Dan Popescu, Suceava

$(u_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{Z},\ u_1\in\mathbb{Z}\Rightarrow r\in\mathbb{Z}$ 2p

$n(r-x)=r-\{xn\}-[x]\ \Rightarrow r-[x]-1<n(r-x)\leq r-[x],\forall n\geq 1$ 3p

$r=x$, adică $x\in\mathbb{Z}$ 2p

3. Arătați că, dacă $x,y\in\mathbb{R}$, atunci $|1+x|+|1+y|+|1+xy|\geq|x|+|y|$.

Ion Bursuc, Suceava

Ridică la pătrat 2p

$a+|a|\geq 0$ 2p

$2(1+x)(1+y)+2|(1+x)(1+y)|+(1-|xy|)^2+2|(1+y)(1+xy)|+2|(1+x)(1+xy)|\geq 0$ 3p

4. Notăm cu *O* punctul de intersecție al diagonalelor *AC* şi *BD* ale patrulaterului convex *ABCD* şi fie I_1,I_2,I_3,I_4 respectiv centrele cercurilor înscrise ale triunghiurilor *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA*. Să se demonstreze că patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$tg\left(\frac{\measuredangle AOB}{2}\right)=\frac{(AB+BO+OA)(CD+DO+OC)}{(BC+CO+OB)(DA+AO+OD)}.$$

Cătălin Țigăeru, Suceava

I_1,O,I_3 şi I_2,O,I_4 sunt coliniare..2p

$I_1O_2\cdot OI_3=I_2O\cdot IO_4$. 2p

Ajunge la $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r_2r_4}{r_1r_3}=\dfrac{S_2S_4}{S_1S_3}\cdot\dfrac{p_1p_3}{p_2p_4}$ 2p

Finalizare..1p

BAREM CORECTARE LICEU
Clasa a X-a

1. Fie $p \in N^*$. Atunci:

1) $\left|1+z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

2) $\left|1-z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

3) $\left|1+z^p+z^{2p}\right| \geq \left|1-|z|\right|^{2p}, \forall z \in \mathbb{C}.$

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Demonstrează $\left|a^p-b^p\right| \geq \left||a|-|b|\right|^p, \forall p \in \mathbb{N}^*$ 3p

De aici, pentru $a=1$ şi $b=z$, se obține 2). 1p

Pentru $a=1$ şi $b=\lambda z$, cu $\lambda^p=-1$, se obține 1). 1p

Dacă $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$,

$\left|1+z^p+z^{2p}\right| = \left|1-\varepsilon z^p\right| \cdot \left|1-\varepsilon^2 z^p\right| = \left|\varepsilon^2-z^p\right| \cdot \left|\varepsilon-z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p \cdot \left|1-|z|\right|^p = \left|1-|z|\right|^{2p}$. 2p

2. Fie $a,b,c \in (1,\infty)$ astfel încât $a+b+c=6$. Să se demonstreze că

$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc}+a\right)+\log_b\left(\sqrt[3]{ca}+b\right)+\log_c\left(\sqrt[3]{ab}+c\right) \geq \frac{11}{2}.$$

Angela Țigăeru, Suceava

$\sqrt[3]{bc}+a \geq 2\sqrt{\sqrt[3]{bc}\cdot a} \Rightarrow \log_a\left(\sqrt[3]{bc}+a\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\log_a b+\frac{1}{3}\log_a c+2\log_a 2+1\right)$ şi celelalte 3p

$\log_a\left(\sqrt[3]{bc}+a\right)+\log_b\left(\sqrt[3]{ca}+b\right)+\log_c\left(\sqrt[3]{ab}+c\right) \geq \frac{5}{2}+\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}+\frac{1}{\log_2 c}$. 2p

Finalizare 2p

3. Considerăm hexagonul regulat *ABCDEF* de centru *O* şi fie $M \in (AB), N \in (BC)$ două puncte astfel încât *MB = NC*. Dacă *P* este mijlocul segmentului *NE*, *Q* este mijlocul segmentului *MP* şi R este mijlocul segmentului *OA*, să se demonstreze că punctele *C*, *Q* şi R sunt coliniare.

Cătălin Țigăeru, Suceava

Figura....................1p

Dacă $\alpha=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, vârfurile sunt $A(1), B(\alpha), C(\alpha^2), D(-1), E(-\alpha), F(-\alpha^2)$. 2p

există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $M((1-\lambda)\cdot 1+\lambda\cdot\alpha)$, $N((1-\lambda)\cdot\alpha+\lambda\cdot\alpha^2)$ 2p

$P(p), Q(q)$ şi $R(r)$ vom avea: $r=\frac{1}{2}$ şi

$p=\frac{-\alpha+n}{2}=\frac{-\alpha+(1-\lambda)\alpha+\lambda\alpha^2}{2}=\frac{\lambda(\alpha^2-\alpha)}{2}=-\frac{\lambda}{2}; q=\frac{p+m}{2}=\frac{-\frac{\lambda}{2}+(1-\lambda)+\lambda\alpha}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3\lambda}{4}+\frac{\lambda\alpha}{2}$. 1p

$\frac{r-q}{r-c} \in \mathbb{R} \Rightarrow C, Q, R$ sunt coliniare....................1p

4. Arătați că, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$**, fracția** $\dfrac{\left(C_{n+1}^{n-1}\right)!}{\prod_{k=1}^{n} k!}$ **este număr natural.**

Silviu Boga Suceava

$C_{n+1}^{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\ldots+n$ 2p

fracția se scrie $\dfrac{(1+2+3+\ldots+n)!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot n!}$ 2p

$\dfrac{(1+2+3+\ldots+n)!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot n!} = C_{1+2+\ldots+n}^{n} \cdot C_{1+2+\ldots+(n-1)}^{n-1} \cdot C_{1+2+\ldots+(n-2)}^{n-2} \cdot \ldots \cdot C_{1+2}^{2} \in \mathbb{N}$ 3p

BAREM CORECTARE LICEU
Clasa a XI-a

1. Să se rezolve, în $M_3(\mathbb{N})$, unde $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale, ecuația $A^3 = I_3$.

Cătălin Țigăeru, Suceava

$tr(A) \neq 0$ rezultă soluția $A_1 = I_3$ 2p

$tr(A) = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 \\ a_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3p

finalizare $A \in \left\{ I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ 2p

2. Fie *f* şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă *f* are proprietatea lui Darboux şi dacă $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-g(x)}{h}$ există şi este finită pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

$\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x+h) - g(x) \right) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 2p

f este continuă $\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$ 3p

$f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 2p

3. **Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietățile $AB = A$ şi $BA = B$. Să se arate că matricea $A + B - I_n$ este inversabilă**.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Arata $A^2 = A$, $B^2 = B$ 3p

$(A+B)^2 - 2(A+B)I_n + I_n^2 = I_n$ 2p

$\det(A + B - I_n) = \pm 1$ 2p

4. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ două numere impare. Atunci:

$$\left[(a+b+c)^n - a^n - b^n - c^n \right]\left[(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m \right] \geq 0, \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Sorin Rădulescu, Ion Savu, Bucureşti

$f_p(x) = (x+a+b)^p - x^p - a^p - b^p$. 2p

$f_p{}'(x) = 0 \Rightarrow$

1) Dacă $a + b = 0$, atunci $f_p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ 1p
2) Dacă $a + b > 0$, atunci $f_p''(x) > 0$, deci f_p este convexă şi f_p' strict crescătoare $\Rightarrow f_p > 0$ în afara intervalului $(-a, -b)$ şi
   $f_p \leq 0,\ \forall x \in [-a, -b] \Rightarrow f_m(x) \cdot f_n(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ 2p
3) Dacă $a + b < 0 \Rightarrow f_p$ concavă şi f_p' strict descrescătoare $\Rightarrow f_p \leq 0$ în afara intervalului $(-a, -b)$ şi $f_p \geq 0$ pe $[-a, -b]$, deci $f_m(x) \cdot f_n(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ 2p

BAREM CORECTARE LICEU
Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f:\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)\to(0;+\infty)$, $f(x)=x\cdot\cos\frac{1}{x}$**.**

a) arătați că este funcție bijectivă;

b) dacă $g:(0;+\infty)\to\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)$ **este inversa funcției f, arătați că şirul** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **cu**

$$x_n=f(n)\cdot\left[\frac{1}{g^2(n)+f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+2f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+3f(n)}+...+\frac{1}{g^2(n)+nf(n)}\right],$$

$(\forall)n\in\mathbb{N}^*$**, este convergent şi determinați limita sa.**

Silviu Boga, Suceava

Funcția este bijectivă, strict crescătoare şi concavă..3p

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln 2$ 4p

2. Fie numerele reale strict pozitive a,b,α **. Calculați** $\lim\limits_{t\nearrow\frac{\pi}{2}}\int_0^t\left(\frac{a}{a+b\cdot tg^{\alpha}x}+\frac{b}{b+a\cdot tg^{\alpha}x}\right)dx$

Ion Bursuc, Suceava

.

$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a}{a+b\cdot tg^{\alpha}x}+\frac{b}{b+a\cdot tg^{\alpha}x},\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{b\cdot tg^{\alpha}x}{a+btg^{\alpha}x}+\frac{a\cdot tg^{\alpha}x}{b+a\cdot tg^{\alpha}x}$, $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ ……………………3p

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx$, $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx=\pi\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}$……..4p

3. Să se arate că, dacă un grup finit $(G,\cdot)\subset GL(2,\mathbb{C})$, **are proprietatea că există** $A,B\in G$ **astfel încât** $tr(A)=tr(B)=tr(AB)=0$, **atunci grupul** $(G,\cdot)$ **nu este comutativ şi este de ordin par. Să se dea un exemplu de grup cu proprietatea enunțată în text.**

Cătălin Țigăeru ,Suceava

Demonstrează că G este necomutativ ……………………………………………………3p
Demonstrează că *n* este par. ………………………………………………………..................…3p
exemplu

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, atunci $G=\{I_2,A,B,AB,-I_2,-A,-B,-AB\}$ este un grup necomutativ.

$\cdot$	I_2	A	B	AB	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$
I_2	I_2	A	B	AB	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$
A	A	I_2	AB	B	$-A$	$-I_2$	I_2	$-B$
B	B	$-AB$	$-I_2$	A	$-B$	AB	$-AB$	$-A$
AB	AB	$-B$	$-A$	I_2	$-AB$	B	A	$-I_2$
$-I_2$	$-I_2$	$-A$	$-B$	$-AB$	I_2	A	B	AB
$-A$	$-A$	$-I_2$	$-AB$	$-B$	A	I_2	AB	B
$-B$	$-B$	AB	I_2	$-A$	B	$-AB$	$-I_2$	A
$-AB$	$-AB$	B	A	$-I_2$	AB	$-B$	$-A$	I_2

....1p

4. Polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}$[X] de grad $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, cu proprietatea că $a_{n-k} = a_k$, $\forall k = \overline{0,n}$, are toate rădăcinile de acelaşi modul, iar $a_n \in \mathbb{R}$*. Să se arate că polinomul f are toți coeficienții reali.

Dan Popescu, Mihai Piticari, Suceava

$|x_k| = 1,\ k = \overline{1,n}$ 2p

$\overline{f(x)} = f(x)$. 3p

Finalizare...2p