**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ**
**"ALEXANDRU MYLLER"**

**Ediţia a V-a**

**Iaşi, 24 martie 2007**

**Test pentru juniori**

**Subiectul 1.** a) Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^2 + 2n + 2007$ nu este pătrat perfect.

b) Fie $k$ un număr natural par, $k \geq 4$. Să se arate că există un număr natural $n$ astfel încât numărul $n^2 + 2n + k$ să fie pătrat perfect.

**Subiectul 2.** Considerăm $n$ drepte concurente în punctul $P$. Dreptele determină în jurul punctului $2n$ unghiuri cu interioare disjuncte, fiecare unghi având măsura de $7^\circ$ sau de $17^\circ$.

a) Să se afle $n$.

b) Să se arate că cel puţin două dintre cele $n$ drepte sunt perpendiculare.

**Subiectul 3.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$ şi fie $M$ mijlocul laturii $BC$. Pe perpendiculara în $A$ pe $AM$ considerăm un punct $D$ astfel încât segmentele $DM$ şi $AB$ să aibă un punct comun, notat $P$. Fie $E$ proiecţia punctului $D$ pe dreapta $BC$. Să se arate că $\angle BPM = \angle EAC$.

**Subiectul 4.** La un concurs de matematică participă $n$ elevi, $n \geq 5$, iar proba conţine 5 probleme. Fiecare elev a rezolvat exact 3 probleme. Pentru orice grup de 5 elevi există o aceeaşi problemă rezolvată de fiecare elev din grup. Să se arate că există o aceeaşi problemă rezolvată de toţi concurenţii.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

## Soluţii

**1.** a) Nu, căci restul împărţirii lui $n^2 + 2n + 2007 = (n + 1)^2 + 2006$ la 4 este 2 sau 3.

b) Fie $k = 2a$, cu $a \in \mathbb{N}$ şi $a \geq 2$. Avem $n^2+2n+k = (n+1)^2+2a-1 = (n + 1)^2 + 2(a - 1) + 1$. Pentru $n = a - 2 \in \mathbb{N}$ rezultă cerinţa.

**2.** a) Considerăm $n$ unghiuri situate de o parte a unei drepte dintre cele date; fie $a$ numărul unghiurilor cu măsura de $7^\circ$. Atunci $7a+17(n-a) = 180$, adică $17n = 10(18 + a)$. Deducem că 10 divide $n$ şi cum $a \leq n$ avem $17n = 10(18 + a) \leq 180 + 10n$, deci $n \leq \frac{180}{7} < 26$. Atunci $n = 10$ care nu convine sau $n = 20$ care convine, cu $a = 16$.

b) Fie o dreaptă ce este latură a unui unghi de $17^\circ$ şi $S$ un semiplan determinat de aceasta. În $S$ sunt 4 unghiuri de $17^\circ$ şi 16 unghiuri de $7^\circ$, conform lui a). Parcurgem unghiurile din $S$ începând cu cel de $17^\circ$ pană la al doilea unghi de $17^\circ$ şi notăm cu $a$ numărul de unghiuri de $7^\circ$ întâlnite. Mai departe, până la al treilea unghi de $17^\circ$ sunt $b$ unghiuri de $7^\circ$, apoi $c$ şi $d$; în plus $a + b + c + d = 16$. Alegem $a + b \geq 8$ - altfel $c + d \geq 8$. Evident $a \leq 8$ sau $b \leq 8$; fie de exemplu $b \leq 8$. Considerăm cele 2 unghiuri de $17^\circ$ ce delimitează regiunea cu cele $b$ unghiuri de $7^\circ$ şi încă $8 - b$ unghiuri de $7^\circ$ din regiunea cu $a$ unghiuri. Cum $8 \cdot 7^\circ + 2 \cdot 17^\circ = 90^\circ$, problema este rezolvată.

**3.** Fie $T$ punctul de intersecţie al dreptelor $DA$ şi $BC$. Conform ipotezei, $A$ este între $D$ şi $T$, în caz contrar segmentele $AB$ şi $DM$ neavând un punct comun. Observăm că $\angle PBM = \angle BAM = 90^\circ - \angle MAC = \angle MAT - \angle MAC = \angle CAT$.

Cerinţa $\angle BPM = \angle EAC$ devine $\angle PBM + \angle BPM = \angle CAT + \angle EAC$ sau $\angle PMT = \angle EAT$.

Pentru demonstraţie este suficient să observăm inscriptibilitatea patrulaterului cu vârfurile $A, D, M, E$, când $M \neq E$. Într-adevăr, dacă $S$ este mijlocul segmentului $DM$, deoarece din $\angle DEM = \angle DAM = 90^\circ$ rezultă $SA = SM = SD = SE$. Dacă $M = E$, evident că $\angle PMT = \angle EAT = 90^\circ$.

**Notă.** Se va acorda atenţie *menţionării* situaţiilor $E = M$, $E \in (MB)$ şi $E \in (MC)$.

**4.** Presupunem prin absurd contrariul. Atunci există concurenţii $A, B, C, D, E$ care nu au rezolvat problemele 1,2,3,4,5 respectiv. Grupul elevilor $A, B, C, D, E$ nu respectă condiţia ca ei să aibă o problemă comună rezolvată, contradicţie.

Propunere de barem

**1.** a) 2 puncte.

b) 3 puncte pentru afirmaţia că un impar este diferenţa a 2 pătrate perfecte; 2 puncte pentru finalizare.

**2.** a) 3 puncte.

b) 2 puncte pentru delimitarea zonelor între unghiuri consecutive de $17°$ şi alte 2 pentru finalizare.

**3.** 3 puncte pentru echivalenţa ccerinţei cu $\angle PMT = \angle EAT$. 4 puncte pentru justificare. Se va scădea 1 punct dacă nu sunt *menţionate* cazurile $E = M$, $E \in (MB)$ şi $E \in (MC)$.

**4.** 2 puncte pentru metoda reducerii la absurd ŞI considerarea unor elevi ce nu au rezolvat problema $i$, $i = 1, 2 \ldots, 5$. 5 puncte finalizarea.