

Version: Romanian

Prima zi, 25 iulie 2007

Problema 1. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale. Pentru fiecare indice i ($1 \leq i \leq n$) definim

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

și fie

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Arătați că oricare ar fi numerele reale $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Arătați că există numere reale $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ pentru care are loc egalitatea în (*).

Problema 2. Considerăm punctele A, B, C, D și E astfel încât $ABCD$ este paralelogram iar $BCED$ este patrulater inscriptibil. Fie ℓ o dreaptă care trece prin punctul A . Presupunem că ℓ intersectează interiorul segmentului DC în F și dreapta BC în G . Dacă, în plus, $EF = EG = EC$, arătați că ℓ este bisectoarea unghiului DAB .

Problema 3. La un concurs de matematică o parte dintre concurenți sunt prieteni. Prietenia este o relație reciprocă. Un grup de concurenți se numește *clique* dacă oricare doi din acest grup sunt prieteni. (În particular, grupurile cu strict mai puțin de două persoane formează un clique.) Mărimea unui clique este, prin definiție, numărul membrilor săi.

Știind că, la acest concurs, maximumul mărimilor clicurilor este par, arătați că toți concurenții pot fi repartizați în două săli, astfel încât maximumul mărimilor clicurilor din fiecare sală să fie același.

Timp de lucru : 4 ore și 30 minute