Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
VII. OSZTÁLY

1. feladat. a) Igazold, hogy az

$$a = \sqrt{9-\sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) \cdot \left(9+\sqrt{77}\right)$$

szám természetes szám!

b) Adottak az x és y valós számok úgy, hogy $xy = 6$. Igazold, hogy ha $x > 2$ és $y > 2$, akkor $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

2. feladat. a) Igazold, hogy ha léteznek a p és q természetes számok úgy, hogy $\sqrt{2p-q}$ és $\sqrt{2p+q}$ természetes számok, akkor q páros!

b) Hány olyan p természetes szám van, amelyre $\sqrt{2p-4030}$ és $\sqrt{2p+4030}$ is természetes szám?

3. feladat. Az ABC háromszögben M az $[AC]$ oldal felezőpontja és $N \in (AM)$. Az N ponton át az AB egyenessel húzott párhuzamos a BM egyenest a P pontban metszi, az M ponton át a BC egyenessel húzott párhuzamos a BN egyenest a Q pontban metszi, az N ponton át az AQ egyenessel húzott párhuzamos a BC egyenest az S pontban metszi.

Bizonyítsd be, hogy a PS és AC egyenesek párhuzamosak!

4. feladat. Az $ABCD$ négyzet $[AB]$ oldalára kívül megszerkesztjük az s ABE egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy $m(ABE\sphericalangle) = 120°$. A B pontból az EAB szög szögfelezőjére húzott merőleges talppontja M, az M pontból az AB egyenesre húzott merőleges talppontja N, a CN és MB egyenesek metszéspontja P. Az ABE háromszög súlypontja G.

Bizonyítsd be, hogy a PG és AE egyenesek párhuzamosak!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că numărul $a=\sqrt{9-\sqrt{77}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)$ este natural.
b) Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $xy=6$. Dacă $x>2$ şi $y>2$, arătaţi că $x+y<5$.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Numărul a se poate rescrie $\sqrt{18-2\sqrt{77}}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)$ **1p**

$18-2\sqrt{77}=\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2$ **2p**

Ca urmare, $a=\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)=\left(18-2\sqrt{77}\right)\left(9+\sqrt{77}\right)=8\in\mathbb{N}$ **1p**

b) Dacă $x>2$, $y>2$, atunci $(x-2)(y-2)>0$ **2p**

Rezultă $xy-2(x+y)+4>0$, de unde $x+y<\dfrac{1}{2}(xy+4)=5$ **1p**

Problema 2. a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.
b) Determinaţi câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Soluţie

a) Din ipoteză, există numerele naturale k şi r astfel încât $2p-q=k^2$, $2p+q=r^2$; atunci $r^2-k^2=2q$ **1p**

Atunci $(r-k)(r+k)=2q$, iar concluzia se obţine din faptul că $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate **2p**

b) Notând ca mai sus, avem $(r-k)(r+k)=2\cdot 4030=2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 31$ **1p**

Cum $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate, iar $r-k<r+k$, perechea $(r-k,r+k)$ poate fi $(2,4030)$, $(10,806)$, $(26,310)$ sau $(62,130)$.

Se obţine $r\in\{2016,408,168,96\}$, iar $p\in\{2030113,81217,12097,2593\}$, deci există 4 numere cu proprietatea din enunţ **3p**

Problema 3. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii $[AC]$ şi punctul $N\in(AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P, paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q, iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S.

Demonstraţi că dreptele PS şi AC sunt paralele.

Soluţie

Notând $MQ\cap AB=\{E\}$ şi $\{D\}=NP\cap ME$, obţinem $EA=EB$ şi $ND=DP$ **2p**

Cum $ANPB$ este trapez, punctele A,Q,P sunt coliniare **2p**

$\Delta ADP\equiv\Delta SDN$ (U.L.U.) **1p**

Rezultă $[AP]\equiv[SN]$ şi, cum $AP\parallel SN$, patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, deci $PS\parallel AC$ **2p**

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul isoscel ABE, cu $m(\sphericalangle ABE)=120^\circ$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB, cu N piciorul perpendicularei din M pe AB, iar cu P intersecţia dreptelor CN şi MB.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE. Demonstraţi că dreptele PG şi AE sunt paralele.

Soluţie

$m(\sphericalangle BAM)=15^\circ$ implică $MN=\dfrac{1}{4}AB$ **2p**

Din $MN \parallel BC$ rezultă $\Delta PMN \sim \Delta PBC$, deci $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{4}$ şi, notând $\{Q\} = BM \cap AE$, rezultă $\dfrac{PM}{BQ} = \dfrac{1}{6}$, de unde $PB = PM + \dfrac{1}{2}BQ = \dfrac{2}{3}BQ$ **3p**

Dacă F este mijlocul segmentului $[AE]$, atunci $\dfrac{BG}{BF} = \dfrac{2}{3}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $PG \parallel AE$ **2p**