OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a VII-a

Subiecte:

1. Fie $\mathrm{A}=\left\{\frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{\sqrt{24}},\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{48}},\ldots,\frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2012}}{\sqrt{2014\cdot 2012}}\right\}$.

   a) Calculați suma elementelor mulțimii A .
   b) Să se arate că pentru orice submulțime B a mulțimii A, suma elementelor lui B nu poate fi număr natural.

2. a) Să se determine numerele întregi a, b, c care verifică relația: $a^2-a+|b-3|+|c-9|=0$.
   b) Să se determine numerele raționale x, y, z care verifică relațiile: $|x-y|=2|y-z|=3|z-x|$ și $x+y+z=2014$.

3. În paralelogramul $ABCD, AC=2AD,\ E$ este mijlocul lui $[DC]$, iar bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$ intersectează DC în punctul F. Dacă G este punctul de intersecție al dreptelor BE și AC, să se arate că $GF \parallel BD$.

4. Fie $ABCD$ un pătrat și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $[BE] \equiv [CF]$. Dacă $AC \cap BF=\{G\}, AE \cap BD=\{H\}$ să se arate că:

   a) $AE \perp BF$.
   b) $GH \perp AB$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a VII-a

1. a) $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2012}} - \frac{1}{\sqrt{2014}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2014}}$ ……………………………………………………………………………..…..4p

   b) Deoarece A are toate elementele strict pozitive, suma elementelor lui B va fi strict pozitivă și mai mică decât suma elementelor lui A. Dacă x este suma elementelor lui B, va rezulta $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, deci x nu poate fi număr natural. ………………………………..…………………………………3p

2. a) Dacă $a \in \mathbb{Z}$ rezultă $a^2 - a = a(a-1) \geq 0$ …………………………… 2p

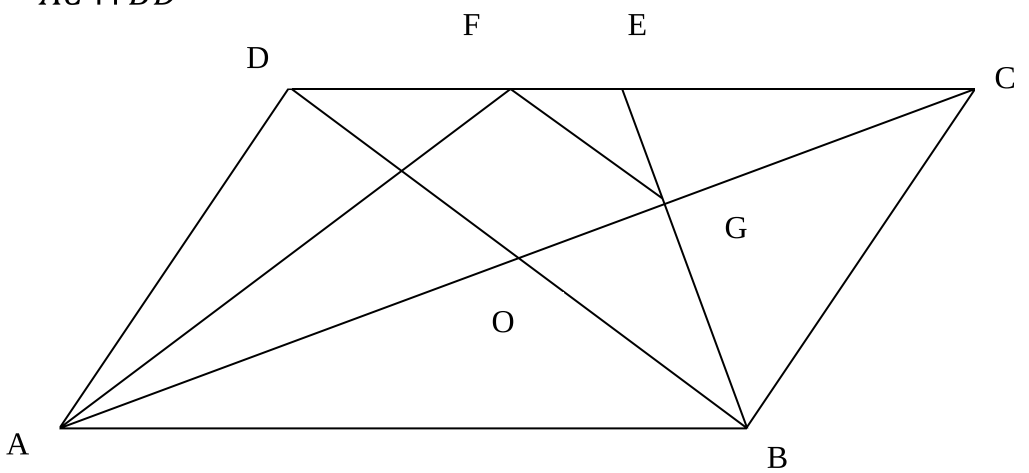
   Va rezulta $a^2 - a = 0, b - 3 = 0, c - 9 = 0, a \in \{0,1\}, b = 3, c = 9$ ………………………………………………………………………………..…2p

   b) Notând $|x-y| = 2|y-z| = 3|z-x| = k$ va rezulta $x - y = \pm k\ , y - z = = \pm\frac{k}{2}, z - x = \pm\frac{k}{3}$

   Adunând aceste relații va rezulta: $0 = k\left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}\right)$. Expresia din paranteză este nenulă, deci $k = 0$ ………………………………………….2p

   Va rezulta $x = y = z = \frac{2014}{3}$ ……………………..……………………1p

3. Fie $\{O\} = AC \cap BD$



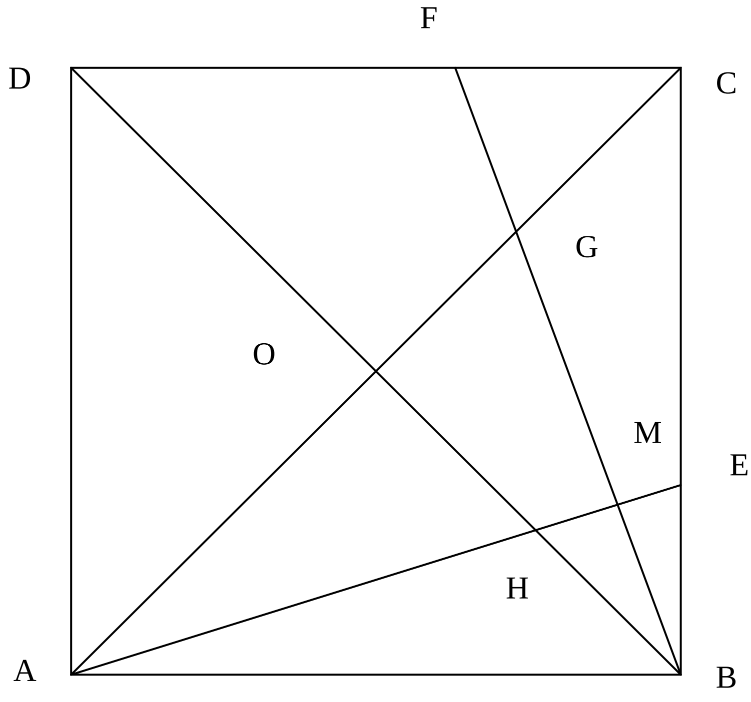
Din teorema bisectoarei în triunghiul ADC va rezulta $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$ ……………….…..2p

E mijlocul lui $[DC]$, O mijlocul lui $[BD]$, deci G este centrul de greutate al triunghiului BCD ………………………………………………………………………………..2p

În triunghiul DOC rezultă $\frac{DF}{FC} = \frac{OG}{GC} = \frac{1}{2}$, deci $GF \parallel OD$ și $GF \parallel BD$ ………………………..3p

4. Fie $\{M\} = AE \cap BF$ și $\{O\} = AC \cap BD$
   a) Din congruența triunghiurilor ABE și BCF rezultă $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CBF}$

   Deci $\widehat{EBM} + \widehat{MEB}$=$\widehat{BAM}$+$\widehat{MEB}$=90°, adică $\widehat{BME}$=90°, deci $AE \perp BF$ ……………..3p



b) În triunghiul ABG, $[AM]$ înălțime, $[BO]$ înălțime, deci H este ortocentru, rezultă $GH \perp AB$ ……………………………………………………………….4p