Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie numerele

$a=\sqrt{176}-\sqrt{288}+\sqrt{4032};$

$b=-\sqrt{275}+\sqrt{450}-\sqrt{6300};$

$c=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}}+\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}}+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}}+\frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}}.$

Să se demonstreze că $c+a:b\in\mathbb{N}$.

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC, m(\measuredangle A)=90^\circ$ şi $AC\cap BD=\{O\}$. Paralela prin punctul O la AD intersectează pe (AB) în punctul E şi pe (DC) în punctul F. Să se demonstreze că:

a). $\triangle AED \sim \triangle BEC$.

b). $[EO$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle DEC$.

c). $[EO]\equiv[OF]$.

Problemă selectată de
Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Problema 3

a). Să se indice un număr natural nenul n pentru care numărul $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n+1}$ este raţional.

b). Să se justifice că numărul $\sqrt{1+3+5+\ldots+2013}$ este număr natural.

c). Numărul $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2013+1994}$ este număr natural?(Justificare).

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Problema 4. În triunghiul ABC, $m(\measuredangle ABC)=2\cdot m(\measuredangle ACB)$ şi $AD\perp BC, D\in BC$. Punctele E şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $AE\perp BE$ şi $\measuredangle EAB\equiv\measuredangle ACB$. Bisectoarea unghiului $\measuredangle AED$ intersectează dreapta AC în M. Dacă $\{H\}=AE\cap BC$, arătaţi că:

a). Triunghiurile BHA şi AHC sunt isoscele.

b). Patrulaterul MCDE este paralelogram.

c). Perimetrul paralelogramului MCDE este egal cu perimetrul triunghiului ABC.

Problemă selectată de
Visilina Guiţă, profesor, Galaţi
din G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$a=\sqrt{176}-\sqrt{288}+\sqrt{4032}=4\cdot\sqrt{11}-12\cdot\sqrt{2}+24\sqrt{7}=4\cdot\left(\sqrt{11}-3\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{7}\right).$	**2p**
	$b=-\sqrt{275}+\sqrt{450}-\sqrt{6300}=-5\cdot\sqrt{11}+15\cdot\sqrt{2}-30\cdot\sqrt{7}=$ $-5\cdot\left(\sqrt{11}-3\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{7}\right).$	**2p**
	$c=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}}+\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}}+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}}+\frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}}=$ $=1-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{45}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{117}}-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{117}}+\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{221}}-\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{221}}+$ $+\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{357}}-\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{357}}+\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{525}}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{525}}==1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$	2p
	$c+a:b=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=0\in\mathbb{N}$.	1p
2.	a).	
	$BC\parallel AD\overset{T.F.A}{\Rightarrow}\triangle BOC\sim\triangle DOA\overset{def}{\Rightarrow}\frac{BC}{AD}=\frac{CO}{AO}=\frac{BO}{OD}(1).$	**1p**
	$EO\parallel BC\overset{T.Th.}{\Rightarrow}\frac{CO}{AO}=\frac{BE}{EA}(2)$	
	$Din\ (1)\ \text{şi}\ (2)\Rightarrow\frac{BC}{AD}=\frac{BE}{EA}.$	
	$\left.\begin{cases}m\left(\measuredangle EAD\right)=m\left(\measuredangle EBC\right)\\ \frac{BE}{EA}=\frac{BC}{AD}\end{cases}\right.\overset{L.U.L}{\Rightarrow}\triangle BEC\sim\triangle AED.$	**2p**

<table>
<tr><td></td><td>b).
$\triangle BEC \sim \triangle AED \Rightarrow \measuredangle ECB \equiv \measuredangle EDA \qquad (1)$
$\left.\begin{array}{l} BC \parallel EO \\ \text{sec}\,anta\ EC \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle ECB \equiv \measuredangle CEO \qquad (2)$
$\left.\begin{array}{l} AD \parallel EO \\ \text{sec}\,anta\ ED \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle EDA \equiv \measuredangle DEO \qquad (3)$
$Din\ (1),(2),(3) \Rightarrow \measuredangle CEO \equiv \measuredangle DEO \Rightarrow [EO$ bisectoarea $\measuredangle$DEC.</td><td>1p

1p</td></tr>
<tr><td></td><td>c).
$EO \parallel BC \overset{\overbrace{T.F.A}}{\Rightarrow} \triangle AEO \sim \triangle ABC \overset{\overbrace{def.}}{\Rightarrow} \dfrac{EO}{BC} = \dfrac{AO}{AC} (1)$
$FO \parallel BC \overset{\overbrace{T.F.A}}{\Rightarrow} \triangle DFO \sim \triangle DCB \overset{\overbrace{def.}}{\Rightarrow} \dfrac{FO}{BC} = \dfrac{DO}{DB} (2)$
$AD \parallel BC \overset{\overbrace{T.F.A}}{\Rightarrow} \triangle DOA \sim \triangle BOC \overset{\overbrace{def.}}{\Rightarrow} \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{DO}{OB} \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{DO}{DB} (3)$
$(1),(2),(3) \Rightarrow \dfrac{EO}{BC} = \dfrac{FO}{BC} \Rightarrow [EO] \equiv [FO].$</td><td>1p

1p</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td>a).
$n = 4 \Rightarrow \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot +1} = 5 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}\ sau$
$n = 5 \Rightarrow \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1} = 11 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>b).Termenii din suma de sub radical sunt numere naturale impare. Numărul numerelor naturale impare de la 1 la 2013 este 1007.
$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } S = 1+3+5+...+2009+2011+2013 \\ S = 2013+2011+2009+...+5+3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$2\cdot S = \underbrace{2014+2014+2014+...+2014}_{1007 ori} \Rightarrow$
$S = 1007^2.$
$\sqrt{1+3+5+...+2013} = \sqrt{1007^2} = 1007 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}.$</td><td>1p

2p</td></tr>
<tr><td>c)
$E = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2013+1994 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...996\cdot 997\cdot 998\cdot ...\cdot 1993\cdot 1994\cdot 1995\cdot ...\cdot 2013+1994 =$
$997^2\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...996\cdot 998\cdot ...\cdot 1993\cdot 2\cdot 1995\cdot ...\cdot 2013)+2\cdot 997 =$
$997^2\cdot k+2\cdot 997, k \in \mathbb{N}^*.$
Se demonstrează că numărul 997 este număr prim $\Rightarrow$
$E == 997\cdot(997\cdot k+2) = 997\cdot h,\ h \in \mathbb{N}^*,$ 997 nu divide numărul $h \Rightarrow$
$\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2013+1994} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2013+1994}$ nu este număr natural.</td><td>2p

1p</td></tr>
</table>

4)	a). Notăm $m(\measuredangle ACB)=m(\measuredangle EAB)=u^\circ \Rightarrow m(\measuredangle ABC)=2\cdot u^\circ$; $\measuredangle ABC-$unghi exterior triunghiului ABH $\Rightarrow m(\measuredangle AHB)=u^\circ=m(\measuredangle EAB)=$ triunghiurile ABH şi AHCsunt isoscele.	1p
	b). În triunghiul isoscel $BHA: BE\perp AH\Rightarrow BE$ este mediană $\Rightarrow[AE]\equiv[EH]$. În triunghiul dreptunghic ADH: DE este mediană $\Rightarrow DE=\frac{AH}{2}=\frac{AC}{2}$. În triunghiul isoscel ACH: AD $\perp$ HC $\Rightarrow$ AD este mediană $\Rightarrow[HD]\equiv[DC]$. $\left.\begin{array}{l}[AE]\equiv[EH]\\ [HD]\equiv[DC]\end{array}\right\}\Rightarrow[ED]$ este linie mijlocie în triunghiul AHC $\Rightarrow$ ED $\parallel$ AC(1) $\left.\begin{array}{l}[AE]\equiv[DE]\Rightarrow\triangle AED \text{ este isoscel}\\ [EM-\text{bisectoarea } \measuredangle AED\end{array}\right\}\Rightarrow EM\perp AD$ $\left.\begin{array}{l}AD\perp EM\\ AD\perp HC\end{array}\right\}\Rightarrow EM \parallel HC$ (2) *Din* (1) si (2) $\Rightarrow MCDE$ este paralelogram.	2p 1p 1p
	c) $P_{MCDE}=2\cdot DC+2\cdot MC=HC+AC=BC+BH+AC=BC+AB+AC=P_{ABC}$	2p