INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN

DAMBOVITA **SSMR DAMBOVITA**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 28 februarie 2015- <u>clasa a XII a</u>

<u>Subiectul 1</u>

Considerăm G un grup și funcția $f:G\to G,\ f(x)=x^3$ cu următoarele proprietăți:

a) f este surjectivă;

b) $f(xy)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in G.$

i) Demonstrați că $x^2y=yx^2,(\forall)x,y\in G.$

ii) Arătați că G este grup abelian. **G.M 1989**

<u>Subiectul 2</u>

Fie A un inel și funcția $f:A\times A\to A,$ definită prin $f(x,y)=(xy)^2-x^2y^2.$

a)Să se calculeze valoarea expresiei $E(x,y)=f(1+x,1+y)-f(1+x,y)-f(x,1+y)+f(x,y),$ unde $1\in A$ este elementul unitate al inelului $A.$

b) Dacă inelul A are proprietatea că: $x+x=0$ implică $x=0$ și dacă $(xy)^2-(yx)^2=x^2y^2-y^2x^2,\ (\forall)x,y\in A$, atunci A este un inel comutativ. **G.M 1984**

<u>Subiectul 3</u>

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$. (Se admite cunoscut următorul rezultat: șirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,n\geq 1,$ este convergent, iar limita sa $c\in(0,1)$) **G.M 2014**

<u>Subiectul 4</u>

Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 xf(x)dx=0.$

a) Dacă $F(t)=\int_t^1 f(x)dx,$ arătați că $\int_0^1 F(t)dt=0.$

b) Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=\left(\int_c^1 f(x)dx\right)^2.$ **G.M 2014**

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN

DAMBOVITA **SSMR DAMBOVITA**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 28 februarie 2015

clasa a XII a

Barem de corectare si notare

Subiect 1(*Prof.univ.dr.habil.Cristinel Mortici, Gazeta Matematică 11-12/1989*)

Considerăm G un grup și funcția $f:G\to G, f(x)=x^3$ cu următoarele proprietăți:

a) f este surjectivă;

b) $f(xy)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in G.$

i) Demonstrați că $x^2y=yx^2,(\forall)x,y\in G.$

ii) Arătați că G este grup abelian.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(\forall)y\in G,(\exists)z\in G,$ astfel încât $z^3=y$	**1p**
$x^2y=x^{-1}x^3z^3=x^{-1}(xz)^3=(zx)^2z$	**1p**
$yx^2=z^3x^3x^{-1}=(zx)^3x^{-1}=(zx)^2z$	**1p**
b) Daca $(xy)^3=x^3y^3$, atunci $(yx)^2=x^2y^2$	**2p**
Arată că $x^2y^2=y^2x^2$	**1p**
Finalizare	**1p**

Subiect 2(*Prof.Șerban Buzețeanu și Prof.C.Niță,Gazeta Matematică,7/1984*)

Fie A un inel și funcția $f:A\times A\to A,$ definită prin $f(x,y)=(xy)^2-x^2y^2.$

a)Să se calculeze valoarea expresiei $E(x,y)=f(1+x,1+y)-f(1+x,y)-f(x,1+y)+f(x,y),$ unde $1\in A$ este elementul unitate al inelului $A.$

b) Dacă inelul A are proprietatea că $x+x=0$ implică $x=0$ și dacă $(xy)^2-(yx)^2=x^2y^2-y^2x^2,$ $(\forall)x,y\in A,$ atunci A este un inel comutativ.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a)Avem $f(x,y)=x(xy-yx)y$	**1p**
Obține $f(1+x,1+y)-f(1+x,y)-f(x,1+y)-f(x,y)=yx-xy$	**2p**
b) Dacă $(xy)^2-(yx)^2=x^2y^2-y^2x^2$ atunci $(xy)^2-x^2y^2=(yx)^2-y^2x^2 \Rightarrow f(x,y)=$ $f(y,x) \Rightarrow E(x,y)=E(y,x).$	**2p**
Cum $E(x,y)=E(y,x) \Rightarrow yx-xy=xy-yx \Rightarrow 2(xy-yx)=0$	**1p**
Finalizare	**1p**

Subiect 3(*Prof. Traian Tămâian, Gazeta Matematică,11/2014)*

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$. (Se admite cunoscut următorul rezultat: șirul $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n, n\geq 1,$ este convergent, iar limita sa $c\in(0,1)$)

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $x_n=\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}, n\geq 2.$ Scrie $x_n=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$	**3p**
Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right)=\int\limits_0^1\ln(1+x)dx=\ln 4-1$	**3p**
Finalizare $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4\cdot e^{-1-c}.$	**1p**

Subiect 4(*Prof. Florin Stănescu, Gazeta Matematică,1/2014)*

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int\limits_0^1 xf(x)dx=0.$ Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=\left(\int\limits_c^1 f(x)dx\right)^2.$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Arată că $\int\limits_0^1 F(t)dt=0$	**2p**
Din teorema de medie, există $m\in(0,1)$ astfel încât $F(m)=0.$	**1p**
Definim funcția $\varphi:[m,1]\to\mathbb{R}, \varphi(y)=e^{-\int\limits_y^1 F(x)dx}\cdot F(y).$ Cum $\varphi(m)=\varphi(0)=0,$ din teorema lui *Rolle,* există $c\in(0,1)$ astfel încât $\varphi'(c)=0.$	**3p**
Finalizare	**1p**