

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a X-a

1. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care verifică relația: $f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}$,

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$

2. Dacă $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac $a^x + a^y + a^z + a^{-x} + a^{-y} + a^{-z} = 10$, să se demonstreze că $1 \leq a^x + a^y + a^z \leq 9$. Precizați când se realizează egalitățile.

3. Fie $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

$$\log_{bc^3}(a^3b^2) + \log_{ca^3}(b^3c^2) + \log_{ab^3}(c^3a^2) \geq \frac{15}{4}.$$

4. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, calculați $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

- Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 21 februarie 2016
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a

1. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care verifică relația: $f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Supliment G.M. 11/2015

Soluție: $f(1) = a, y = 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{f(x)}$ (1)

$$x = a \Rightarrow f(1) = \frac{a}{f(a)} \Rightarrow f(a) = 1.$$

Luăm $y = a$ în relația din ipoteză și avem $f(x) = \frac{x}{f(x\sqrt{a})}, \forall x \in (0, \infty)$ (2)

În relația (2) luăm, pe rând, $x = \sqrt{a} \Rightarrow f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{f(a)} \Rightarrow f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ și $x = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{f(\sqrt{a})} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow a = 1$.

Ne întoarcem în relația (1) și obținem $f(x) = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f^2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in (0, \infty)$, funcție care verifică relația din enunț.

Barem:

$f(1) = a, y = 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{f(x)}$	1p
$x = a \Rightarrow f(1) = \frac{a}{f(a)} \Rightarrow f(a) = 1$	1p
$f(x) = \frac{x}{f(x\sqrt{a})}, \forall x \in (0, \infty)$	1p
Determină $f(1)$	2p
Finalizare: determină funcția	2p

2. Dacă $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac $a^x + a^y + a^z + a^{-x} + a^{-y} + a^{-z} = 10$, să se demonstreze că $1 \leq a^x + a^y + a^z \leq 9$. Precizați când se realizează egalitățile.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Notând $u = a^x + a^y + a^z$ și $v = a^{-x} + a^{-y} + a^{-z}$, din $u + v = 10$ și $u \cdot v \geq 9$, se deduce $u(10 - u) \geq 9$, ceea ce revine la $u \in [1, 9]$. S-a folosit inegalitatea mediilor $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9, \forall \alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. Egalitatea se obține când $a^x = a^y = a^z$, adică pentru $x = y = z$ și $x \in \{-\log_a 3, \log_a 3\}$.

Barem.

Scrie inegalitatea dintre media armonică și media aritmetică a trei numere reale pozitive	1p
Demonstrează $1 \leq a^x + a^y + a^z \leq 9$	5p
Precizează cazurile de egalitate	1p

3. Fie $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

$$\log_{bc^3}(a^3b^2) + \log_{ca^3}(b^3c^2) + \log_{ab^3}(c^3a^2) \geq \frac{15}{4}.$$

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție. Condițiile din ipoteză asigură pozitivitatea logaritmulor. Dacă notăm $S = \sum_{cyc} \log_{bc^3}(a^3b^2)$, atunci

$$S + 3 = \sum_{cyc} (1 + \log_{bc^3}(a^3b^2)) = \sum_{cyc} (\log_{bc^3}(a^3b^3c^3)) = 3 \sum_{cyc} (\log_{bc^3}(abc)) = 3 \sum_{cyc} \left(\frac{1}{\log_{abc}(bc^3)} \right).$$

Folosim inegalitatea CBS în forma Titu Andreescu și obținem:

$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{\log_{abc}(bc^3)} \right) \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum_{cyc} (\log_{abc}(bc^3))} = \frac{9}{\log_{abc}(a^4b^4c^4)} = \frac{9}{4}, \text{ deci } S+3 \geq \frac{27}{4} \Rightarrow S \geq \frac{15}{4}. \text{ Egalitatea are loc pentru}$$

$$a = b = c.$$

Barem.

$\sum_{cyc} \log_{bc^3}(a^3b^2) + 3 = 3 \sum_{cyc} \left(\frac{1}{\log_{abc}(bc^3)} \right)$	3p
$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{\log_{abc}(bc^3)} \right) \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum_{cyc} (\log_{abc}(bc^3))} = \frac{9}{\log_{abc}(a^4b^4c^4)} = \frac{9}{4}$	3p
Finalizare	1p

4. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, calculați $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

R.M.T. 4/2015

Soluție. $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 2z_1z_3 = 2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 2z_1z_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3| \quad (1)$$

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|^2 = |z_1z_2|^2 + |z_2z_3|^2 + |z_1z_3|^2 + \overline{z_1z_2}z_2z_3 + \overline{z_1z_2}z_2z_3 + \overline{z_2z_3}z_3z_1 + \overline{z_2z_3}z_3z_1 + \overline{z_1z_3}z_3z_1 + \overline{z_1z_3}z_3z_1 =$$

$$= 3 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_2}z_3 \quad (2)$$

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_2}z_3 = 3 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_2}z_3 \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2), (3) și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ rezultă $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 2$.

Barem.

Deduce relația (1)	2p
Deduce relația (2)	2p
Deduce relația (3)	2p
Finalizare $ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 2$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.