INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Să se compare numerele $-\sqrt{n}$ şi $-\pi$, unde

$$n=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{2\cdot\sqrt{6}-\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}:\frac{\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2016}\right)^2-\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)^2}{\left(2015\cdot\sqrt{2016}-2016\sqrt{2015}\right)\cdot\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)}\cdot 0{,}5^{-2}.$$

Problema 2.

Să se demonstreze că numărul $a=2\cdot n^2+\left[\sqrt{4\cdot n^2+n}\right]+1,\ n\in\mathbb{N}^*,$ poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

(S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x).

Problema 3.

În interiorul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c, se consideră n^3+1 puncte distincte. Să se demonstreze că există cel puţin două puncte cu proprietatea că distanţa dintre acestea este mai mică sau egală cu $\frac{1}{n}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Problema 4.

Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendicularele AM şi CN, astfel încât punctele M şi N sunt situate de aceeaşi parte a planului pătratului.

a) Să se demonstreze că planele (MBD) şi (NBD) sunt perpendiculare pe planul (MAC).

b) Să se demonstreze că proiecţia punctului A pe planul (MBD) este ortocentrul triunghiului $\triangle$BMD, iar proiecţia punctului C pe planul (NBD) este ortocentrul triunghiului $\triangle$BDN.

c) Fie punctele $E,F\in(AC)$ astfel încât $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$ şi $\frac{AF}{AC}=\frac{3}{4}$. Să se demonstreze că suma $PE+QF=$ constantă, unde punctul P este ortocentrul triunghiului $\triangle$MBD, iar punctul Q este ortocentrul triunghiului $\triangle$NBD.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=2+3+5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=$ $10+2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{15};$ $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=2+3+5-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=$ $10-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{15};$ $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=2+3+5-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=$ $10-2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{15};$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=2+3+5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=$ $10+2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{15};$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=40;$	**2p**
	$2\cdot\sqrt{6}-\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)=$ $2\cdot\sqrt{6}-\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)=$ $2\cdot\sqrt{6}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\right)=2\cdot\sqrt{6}-\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-9\right]=$ $2\cdot\sqrt{6}-\left(2+3+2\cdot\sqrt{6}-9\right)=2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{6}+4=4;$	**1p**
	$\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2016}\right)^2-\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)^2=$ $\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2016}-\sqrt{2015}-\sqrt{2016}\right)\cdot\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2016}+\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)=$ $-2\cdot\sqrt{2016}\cdot2\cdot\sqrt{2015}=-4\cdot\sqrt{2016}\cdot\sqrt{2015};$	**1p**
	$\left(2015\cdot\sqrt{2016}-2016\sqrt{2015}\right)\cdot\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)=$ $\sqrt{2016}\cdot\sqrt{2015}\cdot\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2016}\right)\cdot\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016}\right)=$ $\sqrt{2016}\cdot\sqrt{2015}\cdot\left(2015-2016\right)=-\sqrt{2016}\cdot\sqrt{2015};$	**1p**

	$0,5^{-2} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4;$	**1p**
	$n = \frac{40}{4} : 4 \cdot 4 = 10;$ Se calculează $\sqrt{10} = 3,16...$ $-\sqrt{10} = -3,16...;$ $-\pi = -3,14...;$ Asadar, $-\sqrt{10} < -\pi$.	**1p**
2.	$[x] = k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \le x < k+1;$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n > 0 \Rightarrow 4 \cdot n^2 + n > 4 \cdot n^2; \quad (1)$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4 \cdot n^2 + n < 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1; \quad (2)$ Din 1 şi 2 $\Rightarrow 4 \cdot n^2 < 4 \cdot n^2 + n < 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \Leftrightarrow$ $2 \cdot n < \sqrt{4n^2 + n} < 2 \cdot n + 1 \Leftrightarrow$ $\left[\sqrt{4n^2 + n}\right] = 2n;$ $a = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2 + n^2.$	**3p** **1p** **2p** **1p**
3.	Se împarte fiecare muchie a paralelipipedului dreptunghic în n părţi egale, obţinându-se astfel n^3 paralelipipede dreptunghice de dimensiuni: $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$. Diagonala unui astfel de paralelipiped dreptunghic este $\frac{1}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Aplicăm principiul lui Dirichlet celor $n^3 + 1$ puncte distincte şi celor n^3 paralelipipede dreptunghice. Rezultă că există cel puţin 2 puncte într-un paralelipiped din cele n^3 paralelipipede dreptunghice. Atunci distanţa dintre cele două puncte este mai mică sau egală cu diagonala acestui paralelipiped dreptunghic, care este $\frac{1}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.	**3p** **1p** **2p** **1p**

<table>
<tr>
<td rowspan="2">4.</td>
<td>a) Fie $AC \cap BD = \{O\}$;
$\left.\begin{matrix} MA \perp (ABC) \\ NC \perp (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MA \parallel NC \Rightarrow MA, NC$ drepte coplanare;
$\begin{cases} MA \perp (ABC) \\ AO \perp BD \\ AO, BD \subset (ABC) \end{cases} \overset{T.3.\perp}{\Rightarrow} MO \perp BD$;
$\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp MO \\ AC \cap MO = \{O\} \end{cases} \Rightarrow BO \perp (MAC)$;
$\begin{cases} BO \perp (MAC) \\ BO \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow (MBD) \perp (MAC)$
$\begin{cases} BO \perp (MAC) \\ BO \subset (NBD) \end{cases} \Rightarrow (NBD) \perp (MAC)$.</td>
<td>2p

1p</td>
</tr>
<tr>
<td>b).În $\triangle MAO$, fie $AP \perp MO$, $P \in MO$;
$\begin{cases} AP \perp PO \\ PO \perp BD \\ PO, BD \subset (MBD) \\ AO \perp BD \end{cases} \overset{R2.T.3.\perp}{\Rightarrow} AP \perp (MBD)$;
$\begin{cases} AP \perp (MBD) \\ MB \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow AP \perp MB$;
$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp MA \\ AB \cap AM = \{A\} \end{cases} \Rightarrow AD \perp (MAB)$;
$\begin{cases} AD \perp (MAB) \\ MB \subset (MAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp MB; \begin{cases} AP \perp MB \\ AD \perp MB \\ AP \cap AD = \{A\} \end{cases} \Rightarrow MB \perp (ADP)$;
$\begin{cases} MB \perp (ADP) \\ DP \subset (ADP) \end{cases} \Rightarrow MB \perp DP$;
$\triangle MBD: \begin{cases} MO \perp BD \\ DP \perp MB \\ MO \cap DP = \{P\} \end{cases} \Rightarrow P =$ ortocentrul triunghiului $\triangle MBD$;
$\left.\begin{matrix} AP \perp (MBD) \\ P = \text{ ortocentrul triunghiului } \triangle MBD \end{matrix}\right\} \Rightarrow pr_{(MBD)} A = P -$ ortocentrul triunghiului $\triangle MBD$;
Analog se demonstrează că $pr_{(BND)} C = Q$, unde Q este ortocentrul $\triangle BDN$.</td>
<td>1p

1p</td>
</tr>
</table>

	$c) AE=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot AO=\frac{1}{2}\cdot AO \Rightarrow AE=EO; AP\perp MO \Rightarrow \triangle APO\text{: } m(\measuredangle APO)=90°;$ $\begin{cases}\triangle APO\text{: } m(\measuredangle APO)=90° \\ PE \text{ mediană}\end{cases} \Rightarrow PE=OE=EA=\frac{1}{4}\cdot AC;$ $AF=\frac{3}{4}\cdot AC \Rightarrow AC-CF=\frac{3}{4}\cdot AC \Rightarrow CF=\frac{1}{4}\cdot AC; CQ\perp NO \Rightarrow \triangle CQO\text{: } m(\measuredangle CQO)=90°;$ $\begin{cases}\triangle CQO\text{: } m(\measuredangle CQO)=90° \\ \text{QF mediană}\end{cases} \Rightarrow QF=OF=CF=\frac{1}{4}\cdot AC;$ $PE+QF=\frac{1}{2}\cdot AC=\text{constant.}$	**1p** **1p**