



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
16.02.2013**

Subiectul I.(30 puncte)

Fie funcția $f : R \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{21^x + 1}{3^x + 7^x}$.

- Să se studieze injectivitatea funcției;
- Este funcția f surjectivă?
- Care este numărul soluțiilor ecuației $f(x) + f(-x) = 1$?

Prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Subiectul II.(20 puncte)

Să se determine numerele reale x, y, z, t care satisfac relațiile:

$$x - \sqrt{y} = y - \sqrt{z} = z - \sqrt{t} = t - \sqrt{x} = 2.$$

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul” Turda

Subiectul III.(20 puncte)

Să se arate că există o infinitate de numere reale a, b, c astfel încât $\sqrt[3]{3^a + 5^b + 7^c} \in N^*$.

prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic “Avram Iancu” Cluj Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

- Demonstrați că $\frac{pq}{p+q} \leq \frac{p+q}{4}$, $\forall p, q > 0$;
- Fie numerele $a, b, c \in (0, 1)$ și $x, y, z \in (0, \infty)$ astfel încât $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, $c = (ab)^z$. Arătați că $\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1$.

Gazeta matematică, nr. 7-8-9/2011

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

Barem clasa a X-a (OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) Avem $f(-x) = \frac{\frac{1}{21^x} + 1}{\frac{1}{3^x} + \frac{1}{7^x}} = \frac{1 + 21^x}{7^x + 3^x} = f(x)$, $(\forall)x \in R$. Prin urmare funcția este pară și deci neinjectivă. **(10 puncte)**

b) Vom arăta că $f(x) \geq 1$, $(\forall)x \in R$. Avem $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{21^x + 1}{3^x + 7^x} \geq 1 \Leftrightarrow (3^x - 1)(7^x - 1) \geq 0$, inegalitate adevărată pentru orice x număr real. Deci imaginea funcției este $[1, \infty)$ și deci nu este surjectivă. **(10 puncte)**

c) Cum $f(-x) = f(x)$, avem $2f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$, care nu are soluții, deoarece $f(x) \geq 1$, $(\forall)x \in R$. **(10 puncte)**

Subiectul II.

a) Dacă $x < y$ atunci $x - y < 0$. Din $x - \sqrt{y} = y - \sqrt{z}$ atunci $x - y = \sqrt{y} - \sqrt{z}$ și prin urmare $\sqrt{y} - \sqrt{z} < 0$ adică $y < z$. Din $y - \sqrt{z} = z - \sqrt{t}$ atunci $y - z = \sqrt{z} - \sqrt{t}$ și prin urmare $\sqrt{z} - \sqrt{t} < 0$ adică $z < t$. Din $z - \sqrt{t} = t - \sqrt{x}$ atunci $z - t = \sqrt{t} - \sqrt{x}$ și prin urmare $\sqrt{t} - \sqrt{x} < 0$ adică $t < x$. Așadar avem $x < y < z < t < x$ adică o contradicție. **(10 puncte)**

b) Dacă $x > y$ se procedează după ideea de la punctul a) și obținem: $x > y > z > t > x$ prin urmare un șir de inegalități care nu poate să aibă loc. Rezultă că $x = y = z = t$ și avem $x - \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{x}$.

Condițiile de existență sunt $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ adică $x \in [2, +\infty)$. Efectuând calculele se obține ecuația $x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0$,

ecuație ce admite soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 4$. Având în vedere că $x \in [2, +\infty)$ rămâne că numai $x = 4$ este soluție a ecuației iraționale. Soluția problemei este $x = y = z = t = 4$. **(10 puncte)**

Subiectul III. Cum $\frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{3} = k^3$, $k \in N^*$, rezultă că pentru $a = \log_3 \frac{k^3}{3}$, $b = \log_5 \frac{k^3}{3}$ și $c = \log_7 \frac{k^3}{3}$, obținem:

$$\sqrt[3]{3^a + 5^b + 7^c} = \sqrt[3]{3^{\log_3 \frac{k^3}{3}} + 5^{\log_5 \frac{k^3}{3}} + 7^{\log_7 \frac{k^3}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{3}} = k \in N^*, \text{ de unde rezultă concluzia. } \mathbf{(20 \text{ puncte})}$$

Subiectul IV. a) Demonstrarea egalității **(10 puncte)**

b) $x = \frac{-\lg a}{-\lg b - \lg c}$, $y = \frac{-\lg b}{-\lg a - \lg c}$, $z = \frac{-\lg c}{-\lg a - \lg b}$. Notăm numitorii acestor fracții cu $p > 0, q > 0, r > 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-p + q + r}{2p}, y = \frac{p - q + r}{2q}, z = \frac{p + q - r}{2r}. \text{ Folosind punctul a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x + y + 2} = \frac{2pq}{(p + q + r)(p + q)} \leq \frac{p + q}{2(p + q + r)} \text{ Adunând această inegalitate cu analogele ei, avem}$$

$$\frac{1}{x + y + 2} + \frac{1}{y + z + 2} + \frac{1}{z + x + 2} \leq \frac{p + q + q + r + r + p}{2(p + q + r)} = 1 \mathbf{(10 \text{ puncte})}$$