OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. În triunghiul ABC se iau mijloacele M, N şi P ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Se consideră punctul $E \in (NP$ astfel încât $[NP] \equiv [PE]$ şi punctul $D \in (CM$ astfel încât $[CM] \equiv [MD]$. Să se arate că:

$a)$ $AE = NC$;

$b)$ $AD = 2 \cdot AE$.

PROBLEMA 2. Fie mulţimea $A = \left\{n \,\middle|\, n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,\ \text{unde } a, b, c \in \mathbb{N}\right\}$.

$a)$ Arătaţi că $81 \in A$;

$b)$ Determinaţi elementele din mulţimea A care au exact 6 divizori.

PROBLEMA 3. Se consideră unghiul ascuţit $\widehat{XOY}$. În semiplanul determinat de OX şi în care nu se află semidreapta $[OY$, se duc semidreptele $[OA$ şi $[OB$, perpendiculare pe $[OX$ şi respectiv, pe $[OY$. Se notează cu $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOX}$.

$a)$ Dacă măsura unghiului $\widehat{AOC}$ este cu $16°$ mai mare decât măsura unghiului $\widehat{XOY}$, determinaţi $m\left(\widehat{XOY}\right)$;

$b)$ Arătaţi că dacă $[OB$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$, atunci $[OX$ este bisectoarea $\widehat{COY}$.

PROBLEMA 4. Spunem că un număr de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea (P), dacă cifrele a, b, c, d, e aparţin mulţimii $\{4, 6\}$.

$a)$ Arătaţi că soluţia ecuaţiei $x + 0,46646 = 1,1111$ are proprietatea (P);

$b)$ Determinaţi câte numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ au proprietatea (P);

$c)$ Arătaţi că din oricare 17 numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ care au proprietatea (P), se pot alege două a căror sumă să fie $1,1111$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. În triunghiul ABC se iau mijloacele M, N şi P ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Se consideră punctul $E \in (NP$ astfel încât $[NP] \equiv [PE]$ şi punctul $D \in (CM$ astfel încât $[CM] \equiv [MD]$. Să se arate că:

a) $AE = NC$;

b) $AD = 2 \cdot AE$.

Barem de corectare.

(1p) *a*) Din congruenţa triunghiurilor $\Delta APE \equiv \Delta CPN$,

(2p) obţinem că $AE = NC$.

(1p) *b*) Din congruenţa triunghiurilor $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$,

(1p) obţinem $AD = BC$.

(1p) Din punctul *a*), avem $AE = \dfrac{BC}{2}$.

(1p) Deci $AD = 2 \cdot AE$.

PROBLEMA 2. Fie mulţimea $A = \left\{ n \,\middle|\, n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,\ \text{unde } a, b, c \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Arătaţi că $81 \in A$;

b) Determinaţi elementele din mulţimea A care au exact 6 divizori.

Barem de corectare.

(4p) *a*) Din $81 = 2^0 \cdot 3^4 \cdot 5^0$, rezultă că $81 \in A$.

(1p) *b*) Deoarece numărul divizorilor unui număr de forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ este $(a+1)(b+1)(c+1)$,

(2p) avem următoarele cazuri:

a	b	c	n
0	0	5	3125
0	5	0	243
5	0	0	32
0	1	2	75
0	2	1	45
1	2	0	18
1	0	2	50
2	1	0	12
2	0	1	20

PROBLEMA 3. Se consideră unghiul ascuţit $\widehat{XOY}$. În semiplanul determinat de OX şi în care nu se află semidreapta $[OY$, se duc semidreptele $[OA$ şi $[OB$, perpendiculare pe $[OX$ şi respectiv, pe $[OY$. Se notează cu $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOX}$.

a) Dacă măsura unghiului $\widehat{AOC}$ este cu 16° mai mare decât măsura unghiului $\widehat{XOY}$, determinaţi $m\left(\widehat{XOY}\right)$;

b) Arătaţi că dacă $[OB$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$, atunci $[OX$ este bisectoarea $\widehat{COY}$.

Barem de corectare.

(1*p*) *a*) Din $m\left(\widehat{AOB}\right) = 90^\circ - m\left(\widehat{XOB}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$

(1*p*) şi $m\left(\widehat{AOC}\right) = m\left(\widehat{AOB}\right) + m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right) + m\left(\widehat{BOC}\right)$

(1*p*) obţinem că $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{AOC}\right) - m\left(\widehat{XOY}\right) = 16^\circ$ şi $m\left(\widehat{XOB}\right) = 2 \cdot m\left(\widehat{BOC}\right) = 32^\circ$.

(1*p*) Deci $m\left(\widehat{XOY}\right) = 90^\circ - m\left(\widehat{XOB}\right) = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

(3*p*) *b*) Deoarece, $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{BOC}\right)$, $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{XOC}\right)$ şi $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$, rezultă că $m\left(\widehat{XOC}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$.

PROBLEMA 4. Spunem că un număr de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea (P), dacă cifrele a, b, c, d, e aparţin mulţimii $\{4, 6\}$.

a) Arătaţi că soluţia ecuaţiei $x + 0,46646 = 1,1111$ are proprietatea (P);

b) Determinaţi câte numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ au proprietatea (P);

c) Arătaţi că din oricare 17 numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ care au proprietatea (P), se pot alege două a căror sumă să fie $1,1111$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) Soluţia ecuaţiei este $x = 1,1111 - 0,46646 = 0,64464$, care are proprietatea (P);

(2*p*) *b*) Pentru fiecare cifră a, b, c, d, e sunt două posibilităţi de alegere; fiind 5 cifre, avem $2^5 = 32$ numere cu proprietatea (P);

(3*p*) *c*) Numerele cu proprietatea (P) pot fi grupate în perechi de forma $\overline{0,a_1a_2a_3a_4a_5}$ şi $\overline{0,b_1b_2b_3b_4b_5}$ astfel încât

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = ... = a_5 + b_5 = 10.$$

Suma a două astfel de numere din cele 16 perechi este $1,1111$; deci fiind 17 numere, există două numere care formează o astfel de pereche.

---

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.