**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**
**Etapa locală – 26 februarie 2016**
**Clasa a VIII-a**
**Subiecte**

1. Rezolvați în $\Re$ ecuația:

$$\frac{x^2-2004}{12}+\frac{x^2-2012}{4}=\frac{x^2-4}{2012}+\frac{x^2-12}{2004}.$$

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{n^2+7n+7}$, unde $n$ este un număr natural impar. Arătați că numărul $a$ este irațional și aflați partea sa întreagă.

3. Fie ABCA′B′C′ o prismă triunghiulară regulată cu AB = $4\sqrt{3}$ cm, AA′ = 12 cm și P un punct pe muchia CC′.

a) Aflați lungimea segmentului CP, știind că aria triunghiului PAB este egală cu 12 $\sqrt{6}$ cm$^2$.

b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele AC și C′M, unde M este mijlocul lui AB.

Supliment G.M. 2015

**NOTĂ:**

- Timp de lucru 2 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**
**Etapa locală – 26 februarie 2016**
**Clasa a VIII-a**

Soluţii şi bareme

1. Ecuaţia se poate scrie sub forma:

$$\frac{x^2-2016+12}{12}+\frac{x^2-2016+4}{4}=\frac{x^2-2016+2012}{2012}+\frac{x^2-2016+2004}{2004}\Leftrightarrow \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2016}{12}+1+\frac{x^2-2016}{4}+1=\frac{x^2-2016}{2012}+1+\frac{x^2-2016}{2004}+1\Leftrightarrow \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2016)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2004}\right)=0 \qquad (1) \quad (1p)$$

Din $\frac{1}{12}>\frac{1}{2012},\frac{1}{4}>\frac{1}{2004}$ deducem că $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2004}>0$ (1p)

deci $x=\pm\sqrt{2016}=\pm 12\sqrt{14}$ (1p)

2. Avem $n^2+7n+7<n^2+8n+16 \Leftrightarrow n^2+7n+7<(n+4)^2$ (1p)

Determinăm $n$ pentru care $n^2+7n+7>(n+3)^2$ (1) (2p)

(1)$\Leftrightarrow n>2$. Deci, pentru $n>2$, avem $(n+3)^2<n^2+7n+7<(n+4)^2 \Rightarrow$ (1p)

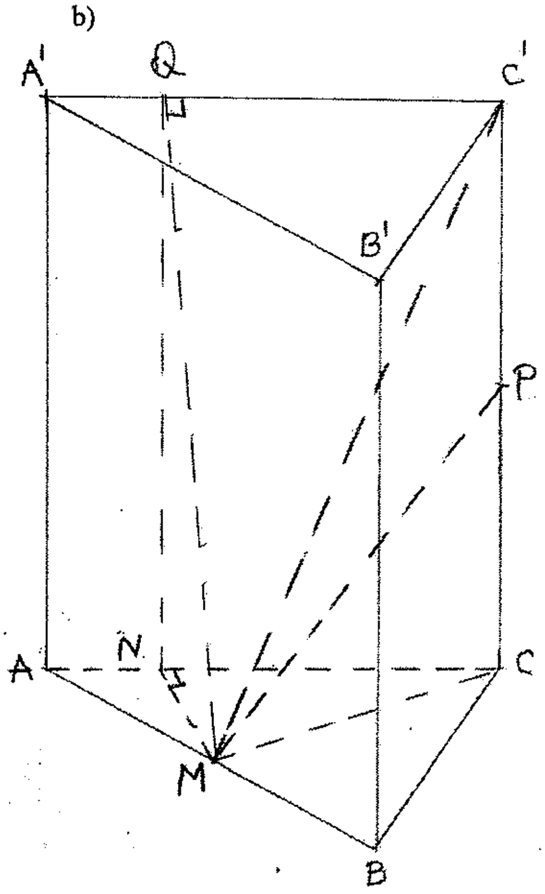
$a\notin Q$ şi $[a]=n+3$ (2p)

Pentru $n\le 2$, $n$ impar, avem $n=1$, iar $a=\sqrt{15}\notin Q$ şi $[a]=3$ (1p)

3. a) Demonstrăm că PM $\perp$ AB. $\mathcal{A}_{\Delta PAB}=\frac{AB\cdot PM}{2}\Rightarrow$ PM $=6\sqrt{2}$ cm (2p)

În $\Delta$ PCM, $m(\angle PCM)=90^0$, CM$=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=6$ cm $\Rightarrow$ CP $=6$ cm. (1p)

b)




A'C' $\parallel$ AC $\Rightarrow \angle(AC,C'M)=\angle(A'C',C'M)$

Fie MN $\perp$ AC, M $\in AC$. Dar CC' $\perp$ (ABC), AC $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CC' $\perp$ MN. Deducem că MN $\perp$ (ACC').

Fie NQ $\perp$ A'C', Q $\in$ A'C'. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, obţinem că MQ $\perp$ A'C'. (2p)

În $\Delta$ AMN, $m(\angle ANM)=90^0$, AM $=\frac{AB}{2}$, $m(\angle NAM)=60^0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ MN= 3cm, AN $=\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ QC'$==3\sqrt{3}$

În $\Delta$ QMN, $m(\angle QNM)=90^0\Rightarrow$ QM $=3\sqrt{17}$ (1p)

În $\Delta$ QMC', $m(\angle C'QM)=90^0\Rightarrow$ C'M$=6\sqrt{5}$ cm,

$\sin(\angle(A'C',C'M))=\sin(\angle(MC'Q)=\frac{\sqrt{85}}{10}$. (1p)