OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 25 IANUARIE 2014

Clasa a VI-a

Problema 1. Numărul natural $\overline{abcd}$ se numeşte „*interesant*” dacă $a \neq 0$ şi $4\overline{ab} = 3\overline{cd}$.
a) Să se demonstreze că orice număr „*interesant*” este divizibil cu 76.
b) Să se afle cel mai mic număr„*interesant*” .

Relu Ciupea , Olteniţa

Problema 2. Dacă m, $m \geq 2$, k și n sunt numere naturale atunci:
a) Determinați toate numerele numerele k și n cu proprietatea $\frac{k^2}{2014} = \frac{2}{n^2 - 17}$.
b) Dacă $(m-1)m(m+1) = k^n$ arătați că $n = 1$.

Nela Costache, Eugen Predoiu și Marin Neață, Călărași

Problema 3. Se considera mulțimea $A = \{1, 2, 3...2014\}$.
a) Câte dintre elementele mulțimii A sunt numere divizibile cu 3 ?
b) Care este numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o submulțime S a mulțimii A care are proprietatea că suma oricăror două elemente din S nu este divizibilă cu diferența lor.
c) Arătaţi că oricum am alege 5 numere prime mai mari ca 3, două dintre acestea au diferenţa divizibilă cu 12.

Gabriela Ruse și Florin Marcu, Călărași

Problema 4. Fie $\angle XOY$ un unghi propriu și punctele $A \in (OX$, $B \in (OY$ astfel încât $[OA] \equiv [OB]$. Semidreptele $(OZ$ și $(OT$ sunt incluse în interiorul unghiului $\angle XOY$ astfel încât $(OZ \subset Int(\angle XOT)$ și $\angle XOZ \equiv \angle TOY$. Dacă punctul M aparține bisectoarei unghiului $\angle ZOT$, $M \notin AB$, $(MA) \cap (OZ = \{N\}$, $(MB) \cap (OT = \{P\}$ și $(AP) \cap (BN) = \{Q\}$, arătaţi că:
a) $[AP] \equiv [BN]$;
b) $Q \in [MO$.

Sorin Furtună, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 5 puncte; b) 2 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.

ENUNȚURI ȘI SOLUȚII – GIMNAZIU

CLASA a V-A

Problema 1. Un număr natural se numește *„prețios”*, daca suma cifrelor sale este divizibila cu 17.

a) Care este cel mai mic număr *„prețios”*?
b) Care este cel mai mare *„ prețios”* de șase cifre?
c) Dați un exemplu de doua numere consecutive, ambele*„ prețioase”.*

Soluţie
a) 89
b) 999996
c) 8899 si 8900

Problema 2. a) Jocurile Olimpice de iarnă au loc o dată la patru ani. În cursul unei perioade de 37 ani, care este numărul de Jocurile Olimpice de iarnă, care ar putea avea loc? (justificați răspunsul)
b) În prima ligă a campionatului național de fotbal participă 18 echipe. În turul campionatului fiecare echipă joacă cu fiecare din celelalte 17 echipe un meci. La sfârșitul unui meci o echipă primește 3 puncte dacă câștigă meciul, 1 punct la dacă meciul se termină cu un scor egal și 0 puncte dacă este învinsă. Se stie că, în clasamentul final de la sfârșitul turului de campionat, nu există echipe care au același număr de puncte. Dacă ultima clasată are 17 puncte puteți să aflați câte din cele $9 \cdot 17 = 153$ de meciuri disputate sau terminat la egalitate? (justificați răspunsul)

Soluţie
a) 9 sau 10
b) Numarul maxim total de puncte este de $153 \cdot 3 = 459$ puncte (in cazul in care avem numai victorii)
Daca ultima echipa are 17 puncte, atunci celelalte echipe vor avea, cel puțin 18, 19,..., 34 puncte, 17+18+...+34=459 ; rezultă că niun meci nu s-a terminat la egalitate

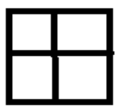
Problema 3. Trebuie să găsiți:

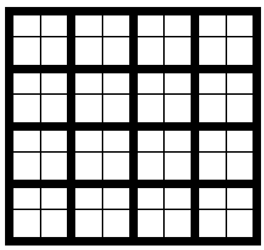
a) Toate cifrele a, b și c, $a \neq 0$ cu proprietate $\overline{abccc} + 1 = \overline{aabbb}$.
b) Toate numerele naturale a și b cu proprietate că avem câtul împărțirii lui a la b 52 și $a + b = 2014$.

Soluție
a) 10999 și 11999;
b) $a = 52b + r,\ r \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots, 51\}$; $a + b = 2014 \Leftrightarrow r = 53(38 - b) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow b = 38$ și $a = 1976$

Problema 4. Pe o tablă de șah (*vezi figura 1*) se așează numai pioni. Întru-un pătrățel al tablei se poate pune cel mult un pion. Un pion, care nu este așezat pe o latură a tablei de șah, se numește „*apărat*” dacă în cele patru pătrățelele alăturate la est, vest, sud și nord mai este plasat cel mult un pion (*vezi figura 2; două pătrățele sunt alăturate dacă au o latură comună*). Dacă pionul este așezat pe o latură sau într-un colț el este „*apărat*” dacă în pătrățelele alăturate în cele trei sau două direcții posibile mai este plasat cel mult un pion. Care este numărul maxim de pioni „*apărați*” care se pot așeza pe tabla de șah? (justificați răspunsul)

Soluție
Dacă punem câte un pion în fiecare pătrățel alb rezulă că pe tablă se pot așeza cel puțin 32 de pioni „*apărați*” . Presupunem că se mai poate așeza un pion „*apărat*”. Grupăm pătratele tablei de șah ca în figura alăturată. Conform principiului cutiei o gupare de patru pătrățele de forma:





conține 3 pioni „*apărați*” , ceea ce este imposibil.

CLASA a VI-A

Problema 1. Numărul natural $\overline{abcd}$ se numește „*interesant*” dacă $a \neq 0$ și $4\overline{ab} = 3\overline{cd}$.

a) Să se demonstreze că orice număr „*interesant*” este divizibil cu 76.

b) Să se afle cel mai mic număr,,*interesant*” .

Soluție

a) $\overline{abcd} = \overline{ab}\cdot 100 + \overline{cd} = 25\cdot\left(4\overline{ab}\right) + \overline{cd} \ = 25\cdot\left(3\overline{cd}\right) + \overline{cd} = 75\overline{cd} + \overline{cd} = 76\overline{cd} \Rightarrow \overline{abcd} \vdots 76$

b) 1216, ceilalți multipli de 4 cifre ai lui 76, 1140 și 1064, nu sunt numere ,,*interesante*”

Problema 2. Dacă $m,\ m \geq 2,\ k$ și n sunt numere naturale atunci:

a) Determinați toate numerele numerele k și n cu proprietatea $\dfrac{k^2}{2014} = \dfrac{2}{n^2-17}$.

b) Dacă $(m-1)m(m+1) = k^n$ arătați că $n=1$.

Soluție

a) $k^2(n^2-17)=2\cdot 2014 \Leftrightarrow k^2(n^2-17) = 1^2\cdot 2^2\cdot 19\cdot 53 \Leftrightarrow$

$k^2=1^2$ și $n^2-17=4028$ rezultă $k=1$ si $n^2=4045$ nu convine 4045 nu este patrat perfect

sau

$k^2=2^2$ si $n^2-17=1007$ rezulta $k=2$ si $n^2=1024$ rezulta $k=2$ si $n=32$

Deci problema are o singura solutie $k=2$ si $n=32$

b) $c.m.m.d.c.\left(\left(m^2-1\right), m\right) = 1 \Rightarrow \exists k_1$ și k_2 astfel încât $m = k_1^n$ și $m^2-1 = k_2^n \Rightarrow \left(k_1^2\right)^n - 1 = k_2^n \Rightarrow n=1$

Problema 3. Se considera mulțimea $A = \{1, 2, 3...2014\}$.

a) Câte dintre elementele mulțimii A sunt numere divizibile cu 3 ?
b) Care este numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o submulțime S a mulțimii A care are proprietatea că suma oricăror două elemente din S nu este divizibilă cu diferența lor.
c) Arătați că oricum am alege 5 numere prime mai mari ca 3, două dintre acestea au diferența divizibilă cu 12.

Soluție

a) $2014 = 3\cdot 671 + 1$, deci sunt 671 numere.

b) Alegem $S = \{3k+1 \mid k = \overline{0, 671}\}$. Aceasta multime are 672 elemente, iar suma oricaror doua elemente este de forma $3m+2$, pe cand diferenta este multiplu de 3, deci diferenta nu poate divide suma.

Aratam ca aceasta este cea mai mare multime posibila.

Presupunem că exista o submultime a lui *A*, cu mai mult de 672 elemente, avand proprietatea ceruta, atunci există doua numere vecine a căror diferență este 1 sau 2. (altfel daca diferenta ar fi 3 am avea in cazul extrem 1,4,7,....2017,.. absurd) .89

Dar, in acest caz, daca diferenta este 1 divide suma lor, iar daca diferenta este 2 atunci si suma lor este multiplu de 2, iarasi absurd.

Problema 4. Pe laturile $[OX$ şi $[OY$ a $\angle XOY$ se iau consideră *A* şi, respectiv, *B* astfel încât $[OA] \equiv [OB]$. Semidreptele $[OZ$ și $[OT$ sunt situate în interiorul unghiului $\angle XOY$ astfel încât $[OZ \subset Int(\sphericalangle XOT)$și $\angle XOZ \equiv \angle TOY$. Dacă punctul M aparține bisectoarei unghiului $\angle ZOT$, $M \notin AB$, $MA \cap [OZ = \{N\}$, $MB \cap [OT = \{P\}$ și $\{Q\} = AP \cap BN$, arătați că:

a) $[AP] \equiv [BN]$;

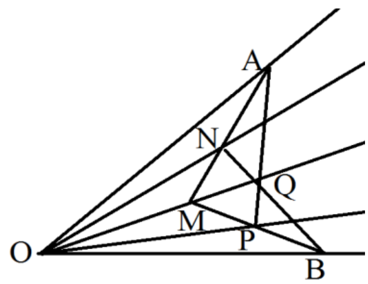
b) $Q \in [MO$.

Soluție

a) $\Delta AOM \equiv \Delta BOM\ (LUL) \Rightarrow [AM] \equiv [BM]\ (1)$ si $\angle OMA \equiv \angle OMB\ (2)$

$\Delta OMN \equiv \Delta OMP (ULU) \Rightarrow [ON] \equiv [OP]$ si $[MN] \equiv [MP] (3)$

$\Delta OAP \equiv \Delta OBM\ (ULU) \Rightarrow [AP] \equiv [BN]$ si $\angle OPA \equiv \angle ONB (4)$



b) (1) si (3) $\Rightarrow [AN] \equiv [BP]$;

$\Delta AMP \equiv \Delta BMN (LUL) \Rightarrow \angle APM \equiv \angle BNM$ (6) si $\angle MAP \equiv \angle MBN$; (4) si (5) $\Rightarrow \angle ANB \equiv \angle BPA$;

$\Delta ANQ \equiv \Delta BPQ (ULU) \Rightarrow [NQ] \equiv [PQ]$; $\Delta NMQ \equiv \Delta PMQ (LLL) \Rightarrow \angle NMQ \equiv \angle PMQ (6) \Rightarrow ($$MoQ$ si $(MQ$ sunt semidrepte opuse

CLASA a VII-A

Problema 1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x > 0$ și $y > 0$.

a) Calculați $(x-1)(x+1)$;

b) Arătați că dacă $x < 1$ atunci $\sqrt{x} < 1$.

c) Arătați că dacă $x^3 + x \le y - y^3$ atunci $x < y < 1$.

Soluție

a) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$; b) $x < 1 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) < 0$ și $\sqrt{x}+1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1$;

c) $x \le y - y^3 \Rightarrow x \le y - y^3 - x^3 < y$; $0 < x^3 + x \le y - y^3 \Rightarrow y(1-y^2) > 0 \Rightarrow y < 1$

Problema 2. Există $m, n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}=\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+k}+\frac{1}{k+m}$ sau $|k-m|+|m-n|+|n-k|=\frac{2014}{2}$?

(justificați răspunsul)

Soluție

i) $\forall m, n, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} > \frac{1}{m+n} \\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+k} \\ \frac{1}{k} > \frac{1}{k+m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k} > \frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+k}+\frac{1}{k+m}$

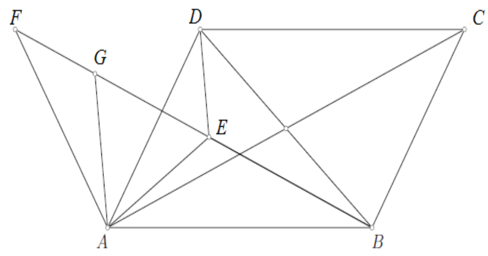
ii) Presupunem că $\exists m, n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|k-m|+|m-n|+|n-k|=\frac{2014}{2}$; Dacă $m \le n \le k \Rightarrow$ $|k-m|+|m-n|+|n-k|=\frac{2014}{2} \Leftrightarrow 2(k-n)=1007 \Rightarrow 2|1007$, contradicție. Similar se procedează în celelate cazuri posibile $m \le k \le n$, $n \le k \le m$, $n \le m \le k$, $k \le m \le n$, $k \le n \le m$

Din i) și ii) rezultă că nu există $m, n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}=\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+k}+\frac{1}{k+m}$ sau $|k-m|+|m-n|+|n-k|=\frac{2014}{2}$.

Problema 3. Dacă $ABCD$ un paralelogram în care $m(\angle BAD) = 60^\circ$, E este un punct în interiorul triunghiului ABD cu proprietatea $m(\angle AEB) = m(\angle BED) = m(\angle AED)$, $F \notin AB$ un punct astfel încât triunghiului ADF este echilateral și G punctul din interiorul triunghiului ADF pentru care triunghiului AEG este echilateral, arătați că:

a) punctele B, E, F și G sunt coliniare;

b) $EA + EB + ED = AC$.



Soluție

a) $m(\angle AEB) = 120^\circ$ și $m(\angle AEG) = 60^\circ \Rightarrow E \in (BG)$;

$m(\angle GAF) = m(\angle DAE) =$

$=60^\circ - m(\angle DAG),\ [AF]\equiv[AD],\ [AG]\equiv[AE] \Rightarrow \Delta FAG \equiv \Delta DAE \Rightarrow m(\angle AGF)=120^\circ$ și $m(\angle AGE)=60^\circ \Rightarrow G\in(EF)$

b) $\Delta BAF \equiv \Delta ABC \Rightarrow [AC]\equiv[BF]$ și $[ED]\equiv[GF],\ [EG]\equiv[EA] \Rightarrow$
$EA+EB+ED=AC.$

Problema 4. Se considera un paralelogram $ABCD$ şi punctele $E\in(BC),\ F\in(CD)$ astfel încât $BE=EC$ și $CF=FD.$ Dacă $AE\cap BF=\{G\}$ și $H\in(AG)$ astfel încât $AH=HG$ determinați valoarea raportului $\frac{HG}{HE}.$

Soluție

Fie P mijlocul segmentului (AB) şi $\{M\}$ =CH $\cap BF$

În triunghiul ABG, (PH) este linie mijlocie, rezulta PH || BM (1).

Cum PB || DF si PB=DF, rezulta ca BFDP este paralelogram,deci PD || BF (2)

Din (1) şi (2) rezultă că punctele P, H, D sunt coliniare.

Cum MF || HD si ţinând cont că F este mijlocul segmentului (CD) rezultă că (FM) este linie mijlocie în triunghiul CDH. Deducem că M este mijlocul segmentului (CH) si G este centru de greutate in triunghiul BCH,de unde valoarea raportului este $\frac{2}{3}$.

CLASA a VIII-A

Problema 1. Fie $x\in\mathbb{R},\ x>0.$ Arătați că $(1+x)^3+\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=16$ dacă și numai dacă $x=1.$

Soluție

$(\leftarrow)$ evident

$(\rightarrow)$ $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x>0$ și $x+\frac{1}{x}=2,\ x\in\mathbb{R},\ x>0 \Leftrightarrow x=1;$ Presupunem $x\neq 1 \Rightarrow (1+x)^3+\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=$
$=2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)>16,$ contrdicție $\Rightarrow x=1.$

Problema 2. Dacă $n=\overline{\underbrace{66\ldots6}_{2013}7},$ calculați $n^2.$

Soluție

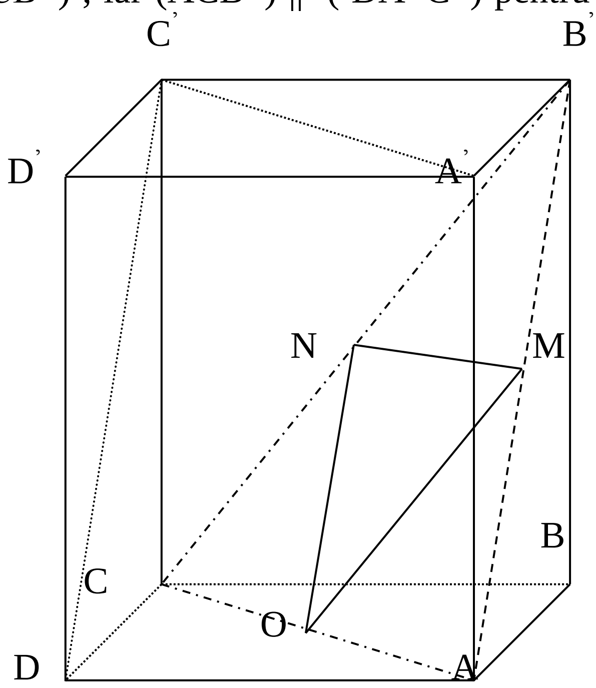
Notez 2013=$k \Rightarrow n^2=\left[\frac{20}{3}\left(10^k-1\right)+7\right]^2=\frac{400}{9}\left(10^{2k}-1\right)+\frac{40}{9}\left(10^k-1\right)+49=\underbrace{44\ldots4}_{k+1}\underbrace{88\ldots8}_{k}9$

Problema 3. Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic și $AC\cap BD=\{O\},$ $AB'\cap A'B=\{M\},\ BC'\cap B'C=\{N\}$ atunci:

a) Demonstrați că planele (AMN) și $(A'C'D)$ sunt paralele.
b) Determinați lungimea diagonalei paralelipipedului dacă se știe că $MN=5\ cm,$ $OM=\sqrt{41}\ cm$ și $ON=\sqrt{34}\ cm.$
c) Paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub dacă și numai dacă $B'O\perp AC$ și $BD'\perp(AMN).$

Soluție

a) Se observă că (OMN) coincide cu (ACB') , iar $(ACB') \parallel (DA'C')$ pentru-că $AC \parallel A'C'$ si $AB' \parallel DC'$;



b) AC = 2.MN = 10cm

$AB' = 2.\ NO = 2\cdot\sqrt{34}$ cm;

$CB' = 2.\ MO = 2\cdot\sqrt{41}$ cm

Fie AB = a; BC= b; $AA' = c$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 100 \\ b^2 + c^2 &= 164 \\ c^2 + a^2 &= 136 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 200$$

$$DB' = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 10\sqrt{2}cm$$

c) Dacă $B'O \perp AC$, cum $BB' \perp (ABC)$,

avem din th.3.⊥ (r) că $BO \perp AC$

deci ABCD este pătrat ⇒ AB = BC = a ;

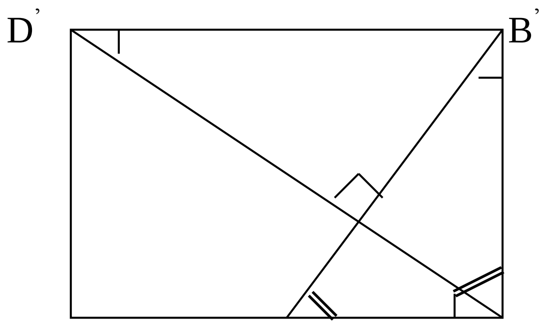
$BD' \perp (OMN) = (ACB') \Rightarrow BD' \perp OB'$

Fie dreptunghiul $BDD'B'$,

tr.$B'D'B$ ~ tr $BB'O$ (cazul UU)

$$\frac{D'B'}{BB'} = \frac{BB'}{BO} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{c} = \frac{c}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = a$$

Deci paralelipipedul este cub.



Problema 4. Dacă *ABCDEFGH* este un paralelipiped dreptunghic, $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ AB = a\sqrt{2},\ BC = a,\ AE = 2a,\ \ M \in (AB),\ AM = BM,\ BD \cap CM = \{O\}$ atunci:

a)Arătați că $CM \perp HO$.

b) Există un punct $T \in (BF)$ cu proprietatea $HO \perp TO$? (justificați răspunsul)

Soluție

Se demonstrează că $\Delta BAD \sim \Delta CBM$, deci $BD \perp CM$ şi prin T 3⊥ rezultă HO⊥CM. Se demonstrează că $DO = 2\cdot OB,\ OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, iar din HO⊥OT se obține $\Delta HDO \sim \Delta OBT$, de unde $BT = \frac{a}{3}$.