OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 28 februarie 2015

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Fie A și B două matrice patratice de ordinul 2 cu elemente reale având proprietatea că $AB - BA = A^2$.

Să se arate că $(B - A)^{2015} = B^{2014}(B - 2015A)$.

GM 9/2014(enunț adaptat)

Subiectul 2. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $det(A + A^t) = 8$ și $det(A + 2A^t) = 27$. Să se calculeze $detA$.

GM 11/2014

Subiectul 3. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1 + (tgx)^2 + \left(tg(2x)\right)^2 + \cdots + \left(tg(nx)\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{n^3}}$$

***

Subiectul 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale definite prin $x_0 > 1$ și ${x_{n+1}}^2 - 2x_{n+1} = x_n - 2$, iar $y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n}$. Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - 2}{y_n}$.

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală Dâmboviţa, 28 februarie 2015
SUBIECT ŞI BAREM ORIENTATIV DE NOTARE

CLASA A IX-A

Varianta 1

Subiectul 1. Se consideră o mulţime $G \subset R$ care satisface simultan proprietăţile:

a) $1 \in G$

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$

Arătaţi că $\sqrt{2015} \in G$.

Soluţie.

$1 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{3} \in G \overset{c)}{\Rightarrow} 4 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{6} \in G \overset{c)}{\Rightarrow} 7 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{9} = 3 \in G$ ....3 p

Fie $P(n): 3n \in G, n \in N^*. P(1)$ este deci adevărată...1 p

Arătăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Dacă $3n \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{3n+2} \in G \overset{c)}{\Rightarrow} 3n+3 \in G,$ adică $P(n+1)$ este adevărată...................... 1 p

$2013 \vdots 3 \Rightarrow 2013 \in G \Rightarrow \sqrt{2015} \in G$ ....2 p

Subiectul 2. Fie $a,b,c,n > 0$ cu $a+b+c=1$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{a}{bc(b+nc)} + \frac{b}{ca(c+na)} + \frac{c}{ab(a+nb)} \geq \frac{27}{n+1}$$

Soluţie.

Cu inegalitatea Cauchy – Buniakovski (forma Titu Andreescu)

$\frac{a}{bc(b+nc)} + \frac{b}{ca(c+na)} + \frac{c}{ab(a+nb)} = \frac{a^2}{abc(b+nc)} + \frac{b^2}{abc(c+na)} + \frac{c^2}{abc(a+nb)} \geq$ …..1 p

$\geq \frac{(a+b+c)^2}{abc(a+b+c)(n+1)} =$ ....3 p

$= \frac{1}{abc(n+1)} \geq \frac{27}{n+1}$ ....3 p

(la ultima inegalitate, din inegalitatea mediilor $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \Rightarrow \frac{1}{27} \geq abc \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq 27$)

Subiectul 3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x = \dfrac{\{x\}}{[x]}$

b) $[x]\cdot\{x\} = [x] - \{x\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x şi $\{x\}$ partea fracţionară a lui x.

Soluţie.

a) $[x] \neq 0 \Rightarrow x \notin [0, 1)$..1 p

$x \geq 1 \Rightarrow x \cdot [x] \geq 1 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii..1 p

$x \leq -1 \Rightarrow x \cdot [x] \geq 1 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii..1 p

$x \in (-1, 0) \Rightarrow$ ecuaţia $-x = \{x\}$ are soluţia $x = -\dfrac{1}{2}$..1 p

b) Pentru $[x] = k \in Z$, $\{x\} = \alpha \in [0, 1)$ ecuaţia devine $\alpha(k+1) = k$..............................1 p

Pentru $k = -1$, ecuaţia nu are soluţii..1 p

Pentru $k \neq -1$, ecuaţia are soluţiile $x = \dfrac{k^2 + 2k}{k+1}$, $k \in Z$..1 p

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA} + (c+a)\overrightarrow{PB} + (a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde $P \in \{O, I, G\}$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral. (Notaţiile sunt cele uzuale.)

Soluţie.

Dacă $P = O$, atunci $(a+b+c)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OI}$ ....2 p

Dacă $P = I$, atunci $(a+b+c)\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{IG} = \vec{0}$ ....3 p

Dacă $P = G$, atunci $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow (a-c)\overrightarrow{GA} + (b-c)\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c$ ....2 p