Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VII-a

1) Az *ABCD* trapézban, $m(\hat{A}) = 90°$; $AB \parallel CD$ şi $CD<AD<BC<AB$,a trapéz kerülete 18 cm, oldalak hossza 4 egymásutáni természetes szám.

a) Számitsd ki az *ABCD* trapéz területét.

b) Számitsd ki az *A* pontnak a *BC* egyenestől mért távolságát.

c) Ha $AD \cap BC = \{P\}$, *M* az *(AB)* felezőpontja és $PM \cap AC = \{S\}$,határozzuk meg az *ASM* és *ASP* háromszögek területeinek arányát.

Gal Ana – Şc. Gimn. Apa

2) Legyen $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^{2013}.$

a) Számitsuk ki $a + 1$ számot.

b) Határozzuk meg a $\sqrt{a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ kifejezés értékét

c) Határozzuk meg $k \in \mathbb{N}$, értékét úgy, hogy $\frac{a+k}{14} \in \mathbb{N}$.

Amic Monica – Lic. de Artă

3) Egy utazó az *A* pontból indulva megakarja tenni az *AB* távolságot. Első nap megteszi az *AB* távolság egyharmadának a felét. A második nap megteszi az egész út egynegyedének az egyharmadát. A harmadik nap megteszi az *AB* egyötödének az egynegyedét és igy tovább. Jelöljük *C*-vel az *AB* szakasz felezési pontját, M_1 –el az AC szakasz felezési pontját és bármely $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ esetén M_n –nel jelöljük az $M_{n-1}C$ szakasz felezőpontját.

a) Hány nap múlva ér az utazó M_2pontba? Hát M_4-be?

b) Hány nap múlva ér az utazó M_n pontba, ahol $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$?

Ha *AB*=100 km, hány nap múlva érkezik az utazó legtöbb egy kilométer távolságra *C* ponttól?

c) Hány nap múlva érkezik az utazó a *C* pontba?

Marciuc Daly – Col. Naţ. „Mihai Eminescu”

4) Az *ABC* háromszögben $AB \neq AC$, léteznek $M, N \in (BC)$ pontok úgy, hogy $N \in (BM)$, $M \in (NC)$ és $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ANB} \equiv \widehat{AMC}$. A $\hat{B}$ és $\hat{C}$ szögfelezői *AM-et* illetve *AN* -et *X* illetve *Y* pontokban metszik. Ha $XY \parallel BC$, akkor

a) Igazoljuk, hogy $\frac{CN}{AC} = \frac{BM}{AB}$.

b) Igazoljuk, hogy *AMN* háromszög egyenlő szárú.

c) Határozzuk meg $m(\widehat{BAC})$.

Braica Petru – Şc. Gimn. „Grigore Moisil”

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1. $CD = x, P_{ABCD} = 4x + 6$ (1 punct)

$x = 3$ (1 punct)

$A_{ABCD} = 18 \text{ cm}^2$ (1 punct)

$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{AB \cdot h_2}{2} = 12$ (1 punct)

$d(A, BC) = \frac{24}{5}$ (1 punct)

S centru de greutate în triunghiul *PAB*. (1 punt)

$\frac{A_{ASM}}{A_{ASP}} = \frac{SM}{SP} = \frac{1}{2}$ (1 punct)

Problema 2. $a + 1 = 2^{2014}$ (3 puncte)

$\sqrt{a + 2\sqrt{a+1} + 2} = 2^{1007} + 1$ (2 puncte)

Restul împărțirii lui *a* la 14 este 1. (1 punct)

$k = 14s + 13, s \in \mathbb{N}$ (1 punct)

Problema 3.

După 6 zile călătorul ajunge în M_2. (2 puncte)

După 30 de zile călătorul ajunge în M_4. (1 punct)

După $2^{n+1} - 2$ zile călătorul ajunge în M_n. (2 puncte)

După 98 de zile călătorul ajunge la 1 km de punctul *C*. (1 punct)

Dacă $AB=d$, în *k* zile călătorul va parcurge distanța

$AS_k = \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)d = \frac{k}{2(k+2)}d$, $AS_k \geq AC \Leftrightarrow \frac{k}{2(k+2)} \geq \frac{1}{2}$,

relație imposibilă. (1 punct)

Problema 4. $\frac{CN}{AC} = \frac{NY}{YA} = \frac{MX}{XA} = \frac{BM}{AB}$ (3 puncte)

$AN = AM$ (2 puncte)

$m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ (2 puncte)