LICEUL TEORETIC TEIUŞ
Str. DECEBAL, nr. 22, TEIUŞ, ALBA
Tel/Fax 0258851157, cod SIREUS 308268
Email: liceulteius@yahoo.com
Web: www.liceulteoreticteius.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală a judeţului Alba, 19 februarie 2016
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a V-a

Problema 1. a) Aflaţi ultima cifră a numărului $x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2016}$.

b) Fie $n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2015$. Arătaţi că *n* este pătrat perfect.

Soluţie:

a) $uc(2^n) \in \{2; 4; 6; 8\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$uc(2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}) = 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$uc(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = uc(2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) = \ldots = uc(2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}) = 0$ 1p

$uc(2^0) = 1 \Rightarrow uc(x) = 1$ 1p

b) Calculul efectiv al sumei 2p

Finalizare, $n = 1008^2$ 1p

Problema 2. Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că împărţind pe $\overline{abc}$ la $\overline{bc}$ obţinem câtul 6 şi restul 5.

Soluţie:

Conform T.I.R. a numerelor naturale avem $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{bc} + 5$ 1p

$100a + \overline{bc} = 6 \cdot \overline{bc} + 5$ .... 1 p

$5 \cdot \overline{bc} = 100a - 5$ 1p

$\overline{bc} = 20a - 1$ 1p

Condiţia $a \leq 5$ 1p

$a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{119; 239; 359; 479; 599\}$ 2p

Problema 3. a) Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ ştiind că $24a + 39b + \overline{cd} = 61$.

b) Determinaţi numărul natural a care verifică egalitatea:

$$2015^0 + a + 3a + 5a + \ldots + 99a + 2016 = 17 + 2a + 4a + \ldots + 100a$$

Soluţie:

a) Dacă $a \geq 3 \Rightarrow 24a \geq 72 \Rightarrow$ nu are soluţie 1p

Dacă $a = 1 \Rightarrow 39b + \overline{cd} = 37 \Leftrightarrow b = 0$ şi $\overline{cd} = 37$ 1p

Dacă $a = 2 \Rightarrow 39b + \overline{cd} = 13 \Leftrightarrow b = 0$ şi $\overline{cd} = 13$ 1p

Finalizare $\overline{abcd} \in \{1037; 2013\}$ 1p

b) $S_1 = 1 + 3 + \ldots + 99 = 50^2 = 2500$ 1p

$S_2 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2(1+2+3+\ldots+50) = 2 \cdot (50 \cdot 51 : 2) = 2550$ 1p

$2500a + 2017 = 17 + 2550a \Leftrightarrow 50a = 2000 \Leftrightarrow a = 40$ 1p

Problema 3. a) Scrieţi numărul 2016 ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Arătaţi că numărul 2016^{2015} poate fi scris ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Soluţie:

a) $2016 = 1600 + 400 + 16 = 40^2 + 20^2 + 4^2$ $= 4^2 + 8^2 + 44^2 = 36^2 + 12^2 + 4^2$ 3p

b) $N = 2016^{2015} = 2016 \cdot 2016^{2014}$ 1p

$N = (40^2 + 20^2 + 4^2) \cdot (2016^{1007})^2 = (40 \cdot 2016^{1007})^2 + (20 \cdot 2016^{1007})^2 + (4 \cdot 2016^{1007})^2$ 3p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.