OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

21 februarie 2016

CLASA a VIII-a

1. **a) (3p)** Demonstrați că: $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2}$, oricare ar fi *n* număr natural.

b) (4p) Arătați că:

$$\left(\sqrt{1\cdot 2}-1\right)\left(\sqrt{2\cdot 3}-2\right)\left(\sqrt{3\cdot 4}-3\right)\dots\left(\sqrt{2015\cdot 2016}-2015\right)<\frac{1}{2^{2015}}.$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^2+2[x]\cdot\{x\}=3(3-\{x\}^2)$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

3. Fie punctele necoplanare *A, B, C, D* asfel încât *AC=AD=BC=BD*, *E* mijlocul lui *(AB)*, iar *F* mijlocul lui *(CD)*.

a) **(2p)** Aflați măsura unghiului dintre dreptele *AB* și *CD*;

b) **(2p)** Dacă $AA' \perp (BCD)$, demonstrați că punctel B, A', F sunt coliniare;

c) **(3p)** Dacă *G* este este piciorul perpendicularei din *A* pe bisectoarea$\sphericalangle ACD$, demonstrați că *EG* este paralelă cu planul *(BCD).*

4. Fie piramida patrulateră regulată *VABCD*, $\{O\}=AC\cap BD$ și $P,Q\in(VO)$. Dacă $\{E\}=AP\cap CV$, $\{F\}=CP\cap AV$, $\{S\}=BQ\cap DV$ și $\{T\}=DQ\cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele *EF* și *ST* nu depinde de alegerea punctelor *P* și *Q* pe segmentul (VO).

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. **a) (3p)** Demonstrați că: $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2}$, oricare ar fi *n* număr natural.

b) (4p) Arătați că:

$$\left(\sqrt{1\cdot 2}-1\right)\left(\sqrt{2\cdot 3}-2\right)\left(\sqrt{3\cdot 4}-3\right)\ldots\left(\sqrt{2015\cdot 2016}-2015\right)<\frac{1}{2^{2015}}.$$

Prof. Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

***Soluție*:** **a)** $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}$.

Prin ridicare la pătrat: $n^2+n<n^2+n+\frac{1}{4}$, ceea ce este adevărat, oricare ar fi *n* număr natural.

b) Aplicând inegalitatea $\sqrt{n(n+1)}-n<\frac{1}{2}$ de la punctul a) avem: $\sqrt{1\cdot 2}-1<\frac{1}{2}$; $\sqrt{2\cdot 3}-2<\frac{1}{2}$; $\sqrt{3\cdot 4}-3<\frac{1}{2}$; ...; $\sqrt{2015\cdot 2016}-2015<\frac{1}{2}$. Înmulțind cele 2015 inegalități de mai sus obținem:

$\left(\sqrt{1\cdot 2}-1\right)\left(\sqrt{2\cdot 3}-2\right)\left(\sqrt{3\cdot 4}-3\right)\ldots\left(\sqrt{2015\cdot 2016}-2015\right)<\frac{1}{2^{2015}}$.

Barem:

a) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}$	**1p**
Prin ridicare la patrat: $n^2+n<n^2+n+\frac{1}{4}$, ceea ce este adevărat, oricare ar fi *n* număr natural.	**2p**
b) Aplic inegalitatea $\sqrt{n(n+1)}-n<\frac{1}{2}$ de la punctul a)	**1p**
$\sqrt{1\cdot 2}-1<\frac{1}{2}$; $\sqrt{2\cdot 3}-2<\frac{1}{2}$; $\sqrt{3\cdot 4}-3<\frac{1}{2}$; ...; $\sqrt{2015\cdot 2016}-2015<\frac{1}{2}$.	**2p**
Înmulțind cele 2015 inegalități de mai sus obținem: $\left(\sqrt{1\cdot 2}-1\right)\left(\sqrt{2\cdot 3}-2\right)\left(\sqrt{3\cdot 4}-3\right)\ldots\left(\sqrt{2015\cdot 2016}-2015\right)<\frac{1}{2^{2015}}$.	**1p**

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^2+2[x]\cdot\{x\}=3(3-\{x\}^2)$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

Prof. Tamara Brutaru, Suceava

Soluție. Cum $\{x\}=x-[x]$, notând $[x]=k, k\in\mathbb{Z}$, ecuația devine: $x^2+2k(x-k)+3(x-k)^2=9$.
Efectuând calculele obținem: $4x^2-4xk+k^2=9 \Leftrightarrow (2x-k)^2=9$. Rezultă $2x-k=-3$ sau $2x-k=3$.
Cum $2x-k=2x-[x]=2([x]+\{x\})-[x]=[x]+2\{x\}$, avem: $[x]+2\{x\}=-3$ sau $[x]+2\{x\}=3$.
Din $[x]+2\{x\}=-3$ *și* $[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\{0;0{,}5\}\Rightarrow x\in\{-3;\ -3{,}5\}$, iar din $[x]+2\{x\}=3$ *și* $[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $\{x\}\in\{0;0{,}5\}\Rightarrow x\in\{3;\ 2{,}5\}$

Barem.

$\{x\}=x-[x]$, oricare ar fi numărul real *x*.	**1p**
Notând $[x]=k, k\in\mathbb{Z}$, ecuația devine: $x^2+2k(x-k)+3(x-k)^2=9$.	**1p**
Efectuând calculele obținem: $4x^2-4xk+k^2=9 \Leftrightarrow (2x-k)^2=9$.	**1p**
Rezultă $2x-k=-3$ sau $2x-k=3$.	**1p**
Cum $2x-k=2x-[x]=2([x]+\{x\})-[x]=[x]+2\{x\}$, avem: $[x]+2\{x\}=-3$ sau $[x]+2\{x\}=3$.	**1p**
$[x]+2\{x\}=-3$ *și* $[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\{0;0{,}5\}\Rightarrow x\in\{-3;\ -3{,}5\}$	**1p**
$[x]+2\{x\}=3$ *și* $[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\{0;0{,}5\}\Rightarrow x\in\{3;\ 2{,}5\}$	**1p**

3. Fie punctele necoplanare *A, B, C, D* asfel încât *AC=AD=BC=BD*, *E* mijlocul lui *(AB)*, iar *F* mijlocul lui *(CD)*.

a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele *AB* și *CD*;

b) Dacă $AA'\perp(BCD)$, demonstrați că punctele B, A', F sunt coliniare;

c) Dacă *G* este este piciorul perpendicularei din *A* pe bisectoarea$\sphericalangle ACD$, demonstrați că *EG* este paralelă cu planul *(BCD).*

prof. Larionescu Corina ,Suceava

Soluție. **a)** În Δ ACD isoscel, (AF) este mediană $\Rightarrow AF\perp CD$(1). În Δ BCD isoscel, (BF) este mediană $\Rightarrow BF\perp CD$(2). Din (1), (2) și $AF\cap BF=\{F\}\Rightarrow$ CD $\perp(ABF)$. Cum $AB\subset(ABF)$, avem CD $\perp AB\Rightarrow$ măsura unghiului dintre dreptele *AB* și *CD* este 90^0.

b) Cum $AA'\perp(BCD)$ și $AF\perp CD$, CD, $A'F\subset(BCD)$, conform reciprocei 1 a teoremei celor trei perpendiculare rezultă $A'F\perp CD$. Dar $BF\perp CD$, deci B, A', F sunt coliniare.

c) Fie $AG\cap CD=\{I\}$. În Δ ACI, (CG este bisectoare, CG este înălțime, deci Δ ACI este isoscel, rezultă G este mijlocul (AI). Cum E este mijlocul (AB) și G este mijlocul (AI), avem (EG) linie mijlocie în Δ ABI, rezultă $EG\parallel BI$. Din $EG\parallel BI$, $BI\subset(BCD)\Rightarrow EG\parallel(BCD)$.

Barem.

a) În Δ ACD isoscel, (AF) este mediană $\Rightarrow AF \perp CD (1)$. În Δ BCD isoscel, (BF) este mediană $\Rightarrow BF \perp CD (2)$	**1p**
Din (1), (2) și $AF \cap BF = \{F\} \Rightarrow$ CD $\perp (ABF)$. Cum $AB \subset (ABF)$, avem CD $\perp AB \Rightarrow$ măsura unghiului dintre dreptele *AB* și *CD* este 90^0.	**1p**
b) Cum $AA' \perp (BCD)$ și $AF \perp CD$, CD, $A'F \subset (BCD)$, conform reciprocei 1 a teoremei celor trei perpendiculare rezultă $A'F \perp CD$.	**1p**
Dar $BF \perp CD$, deci B, A', F sunt coliniare	**1p**
c) Fie $AG \cap CD = \{I\}$. În Δ ACI, (CG este bisectoare, CG este înălțime, deci Δ ACI este isoscel, rezultă G este mijlocul (AI).	**1p**
Cum E este mijlocul (AB) și G este mijlocul (AI), avem (EG) linie mijlocie în Δ ABI, rezultă $EG \parallel BI$.	**1p**
$EG \parallel BI, BI \subset (BCD) \Rightarrow EG \parallel (BCD)$.	**1p**

4. Fie piramida patrulateră regulată *VABCD*, $\{O\} = AC \cap BD$ și $P, Q \in (VO)$. Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{S\} = BQ \cap DV$ și $\{T\} = DQ \cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele *EF* și *ST* nu depinde de alegerea punctelor *P* și *Q* pe segmentul (VO).

Gazeta Matematică Nr.11/2014

Soluție. Cum *ABCD* pătrat, $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow$ *AO=OC* (1), *BO=OD* (2),$AC \perp BD$ (3). În Δ VAC, $AE \cap CF \cap VO = \{P\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VE}{EC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{AF}{FV} = 1$, iar din (1) obținem: $\frac{VE}{EC} = \frac{FV}{AF}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $FE \parallel AC$. Analog, în Δ VDB, $DS \cap DT \cap VO = \{PQ\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VT}{TB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{SD}{VS} = 1$, iar din (2) obținem: $\frac{VT}{TB} = \frac{VS}{SD}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $ST \parallel DB$. Cum $FE \parallel AC$, $ST \parallel DB$, $AC \perp BD \Rightarrow EF \perp ST \Rightarrow\ m(\sphericalangle EF, ST) = 90^0$, deci nu depinde de alegerea $P, Q \in (VO)$.

Barem:

Cum *ABCD* pătrat, $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow$ *AO=OC* (1), *BO=OD* (2),$AC \perp BD$ (3).	**1p**
În Δ VAC, $AE \cap CF \cap VO = \{P\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VE}{EC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{AF}{FV} = 1$.	**2p**
Din (1) obținem: $\frac{VE}{EC} = \frac{FV}{AF}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $FE \parallel AC$.	**1p**
Analog, în Δ VDB, $DS \cap DT \cap VO = \{PQ\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VT}{TB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{SD}{VS} = 1$, iar din (2) obținem: $\frac{VT}{TB} = \frac{VS}{SD}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $ST \parallel DB$.	**2p**
Cum $FE \parallel AC, ST \parallel DB, AC \perp BD \Rightarrow EF \perp ST \Rightarrow\ m(\sphericalangle EF, ST) = 90^0$, deci nu depinde de alegerea $P, Q \in (VO)$.	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.