

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VIII-A

1. Se consideră numărul $N = \sqrt{2009 \cdot 2011 \cdot 2013 \cdot 2015 + 16}$. Calculați $\left[\frac{N}{2015} \right]$, unde

$[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Ștefan Ciochină, Brăila

2. Dacă numerele reale $x, y, z \in [0, +\infty)$ verifică relațiile:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x \cdot y} + 1 \text{ și } \frac{y+z}{2} \leq \sqrt{y \cdot z} + 4,$$

demonstrați că $|\sqrt{z} - \sqrt{x}| \leq 3\sqrt{2}$.

Marius Damian, Brăila

3. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ și $N \in (CD)$ astfel încât $DN = \frac{1}{3} DC$.

a) Determinați muchia cubului știind că aria triunghiului $A'AN$ este $\frac{8\sqrt{10}}{3} \text{ cm}^2$.

b) Determinați cosinusul unghiului dintre planele $(A'AN)$ și $(D'DA)$.

c) Calculați distanța de la D la planul $(A'AN)$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

4. Se consideră triunghiul ABC , $AC = BC$, $m(\angle ACB) = 90^\circ$ și triunghiul DAB , $DA = DB$, situate în plane perpendiculare. Fie $M \in (BC)$, $BM = 2CM$, $N \in (AC)$, $AC = 3AN$, $P \in MN \cap AB$, T mijlocul segmentului $[AB]$, iar G centrul de greutate al triunghiului DAB . Să se calculeze tangenta unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele (ABC) și (DBC) , știind că $3SD = 5CT$, unde $S \in PG \cap AD$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VIII-A - Soluții

1. Se consideră numărul $N = \sqrt{2009 \cdot 2011 \cdot 2013 \cdot 2015 + 16}$. Calculați $\left[\frac{N}{2015} \right]$, unde

$[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Ștefan Ciochină, Brăila

Soluție.

$$N = \sqrt{2009 \cdot 2011 \cdot 2013 \cdot 2015 + 16} \Rightarrow N = \sqrt{(2012-3)(2012-1)(2012+1)(2012+3) + 16}$$

$$\Rightarrow N = 2012^2 - 5$$

$$\left[\frac{N}{2015} \right] = \left[\frac{2012^2 - 5}{2015} \right] = \left[\frac{2015 \cdot 2009 + 4}{2015} \right] = 2009$$

2. Dacă numerele reale $x, y, z \in [0, +\infty)$ verifică relațiile:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x \cdot y} + 1 \text{ și } \frac{y+z}{2} \leq \sqrt{y \cdot z} + 4,$$

demonstrați că $|\sqrt{z} - \sqrt{x}| \leq 3\sqrt{2}$.

Marius Damian, Brăila

Soluție. Avem:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x \cdot y} + 1 \Rightarrow x - 2\sqrt{x \cdot y} + y \leq 2 \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{2}$$

și

$$\frac{y+z}{2} \leq \sqrt{y \cdot z} + 4 \Rightarrow y - 2\sqrt{y \cdot z} + z \leq 8 \Rightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \leq 8 \Rightarrow |\sqrt{y} - \sqrt{z}| \leq 2\sqrt{2}.$$

Folosind acum inegalitatea triunghiulară pentru module, obținem

$$|\sqrt{z} - \sqrt{x}| = |(\sqrt{z} - \sqrt{y}) + (\sqrt{y} - \sqrt{x})| \leq |\sqrt{z} - \sqrt{y}| + |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

3. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ și $N \in (CD)$ astfel încât $DN = \frac{1}{3} DC$.

a) Determinați muchia cubului știind că aria triunghiului $A'AN$ este $\frac{8\sqrt{10}}{3} \text{ cm}^2$.

b) Determinați cosinusul unghiului dintre planele $(A'AN)$ și $(D'DA)$.

c) Calculați distanța de la D la planul $(A'AN)$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție. a) Fie x muchia cubului, din triunghiul dreptunghic AND calculăm

$$AN = \frac{x\sqrt{10}}{3} \Rightarrow A_{A'AN} = \frac{x^2\sqrt{10}}{6} = \frac{8\sqrt{10}}{3} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

b) Proiecția triunghiului $A'AN$ pe planul $(D'DA)$ este triunghiul $A'AD \Rightarrow$

$$\text{Aria}[A'AD] = \text{Aria}[A'AN] \cdot \cos\langle(A'AN), (A'AD)\rangle \Rightarrow$$

$$\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{10}}{6} \cdot \cos\langle(A'AN), (A'AD)\rangle \Rightarrow \cos\langle(A'AN), (A'AD)\rangle = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

c) Fie $DT \perp AN \Rightarrow DT = \text{distanța de la } D \text{ la planul } (A'AN); DT \perp AN; DT \perp AA'$;

$$AA', AN \subset (A'AN) \Rightarrow DT \perp (A'AN); DT = \frac{AD \cdot DN}{AN} = \frac{x}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{5}$$

4. Se consideră triunghiul ABC , $AC = BC$, $m(\angle ACB) = 90^\circ$ și triunghiul DAB , $DA = DB$, situate în plane perpendiculare. Fie $M \in (BC)$, $BM = 2CM$, $N \in (AC)$, $AC = 3AN$, $P \in MN \cap AB$, T mijlocul segmentului $[AB]$, iar G centrul de greutate al triunghiului DAB . Să se calculeze tangenta unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele (ABC) și (DBC) , știind că $3SD = 5CT$, unde $S \in PG \cap AD$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție. Fie V mijlocul lui $[BC]$. $[TV]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC , $m(\angle ACB) = 90^\circ$, deci $TV \perp BC$.

Cum $[DT]$ e linie mijlocie în triunghiul DAB , $DA = DB$, rezultă că $DT \perp BC$. Mai avem și $(ABC) \perp (ABD)$, deci $DT \perp (ABC)$. Cu teorema celor trei perpendiculare rezultă că $DV \perp BC$,

$$\text{deci } \text{tg}\langle(A'AN), (D'BC)\rangle = \text{tg}\langle TV, DV \rangle = \frac{DT}{TV}$$

$$\text{Fie } CM = AN = x, BM = CN = 2x, AB = 3x\sqrt{2}, CT = \frac{3x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SD = \frac{5x\sqrt{2}}{2}$$

Se aplică Menelaos în $\triangle ABC$, $P - N - M$:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PA+3\sqrt{2}x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{2x}{x} = 1 \Rightarrow PA = x\sqrt{2}.$$

Se aplică Menelaos în $\triangle ATD$, $P-S-G$:

$$\frac{PA}{PT} \cdot \frac{GT}{GD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1 \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5x\sqrt{2}}{SA} = 1 \Rightarrow SA = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicând Pitagora în $\triangle ATD$, avem $\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{5x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + DT^2 \Rightarrow DT = \frac{3x\sqrt{6}}{2}$,

$$\text{deci } \operatorname{tg}(TV, DV) = \frac{\frac{3x\sqrt{6}}{2}}{\frac{2}{3x}} = \sqrt{6}.$$