Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

XII. OSZTÁLY

1.feladat. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n}\,\mathrm{d}x$. határértéket!

2. feladat. Egy $(G,\cdot)$ csoport (P) tulajdonságú, ha a G minden f automorfizmusa esetén léteznek a G olyan g és h automorfizmusai, amelyekre $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, bármely $x \in G$ esetén. Igazold, hogy:

a) Minden (P) tulajdonságú csoport kommutatív!

b) Minden kommutatív, páratlan rendű, véges csoport (P) tulajdonságú!

c) Nincs (P) tulajdonságú, $4n+2$, $(n \in \mathbb{N})$ rendű véges csoport!

(Egy csoport rendje a csoport elemeinek száma.)

3. feladat. Adott az $f\colon [0,\pi/2] \to [0,\infty)$ növekvő függvény. Igazold, hogy:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(f(x) - f(\pi/4)\big)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$

b) Létezik $a \in [\pi/4, \pi/2]$ úgy, hogy $\displaystyle\int_0^a f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\cos x\,\mathrm{d}x.$

4. feladat. Az $(A,+,\cdot)$ gyűrűben $x=0$ az egyetlen megoldása az $x^2=0$, $x \in A$ egyenletnek. Adott a $B = \{a \in A \mid a^2 = 1\}$ halmaz. Igazold, hogy:

a) $ab - ba = bab - a$, bármely $a \in A$ és $b \in B$ esetén!

b) $(B,\cdot)$ csoport.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică, 2013
Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti, 9 Martie, 2013

CLASA a XII-a

Problema 1. Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Problema 2. Un grup $(G,\cdot)$ are proprietatea (P), dacă, pentru orice automorfism f al lui G, există două automorfisme g şi h ale lui G, astfel încât $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, oricare ar fi $x\in G$. Să se arate că:

(a) Orice grup care are proprietatea (P) este comutativ.

(b) Orice grup comutativ finit de ordin impar are proprietatea (P).

(c) Niciun grup finit de ordin $4n+2$, $n\in\mathbb{N}$, nu are proprietatea (P).

(Ordinul unui grup finit este numărul de elemente ale acelui grup.)

Problema 3. Fie $f\colon[0,\pi/2]\to[0,\infty)$ o funcţie crescătoare. Să se arate că:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\big(f(x)-f(\pi/4)\big)(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x\ge 0.$

(b) Există $a\in[\pi/4,\pi/2]$, astfel încât $\displaystyle\int_0^a f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\cos x\,\mathrm{d}x.$

(Gazeta Matematică)

Problema 4. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea că $x=0$ este unica soluţie a ecuaţiei $x^2=0$, $x\in A$. Fie $B=\{a\in A\mid a^2=1\}$. Să se arate că:

(a) $ab-ba=bab-a$, oricare ar fi $a\in A$ şi $b\in B$.

(b) $(B,\cdot)$ este grup.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.