Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Arătați că dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2016x + 1 = 0$, atunci $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinați cel mai mare număr natural k pentru care $(2013! + 2014! + 2015!) \vdots 2015^k$

3. Pe latura BC a triunghiului ABC considerăm un punct A_0 și pe AA_0 un punct M. Notăm cu C_1 și B_1 punctele de intersecție $BM \cap AC$ și $CM \cap AB$. Dreapta paralelă la BC prin punctul A -intersectează dreptele A_0B_1 și A_0C_1 în punctele B_2 și C_2. Arătați că punctul A este mijlocul segmentului $[B_2C_2]$.

4. Un ceas mecanic are un defect de fabricație. Astfel secundarul funcționează corect (sare una la o secundă), iar minutarul sare una la 90 de secunde, orarul sare una la fiecare 12 sărituri ale minutarului (ceasul are 60 de gradații).

a) De câte ori se suprapune secundarul și minutarul în decursul a 90 de minute?

b) În trei zile câte momente există în care și acest ceas și unul fără defect are cele trei ace de ceasornic suprapuse?

Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluţii si bareme

1. Arătați că dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2016x + 1 = 0$, atunci $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluție

$\Delta = 2016^2 - 4 > 0 \Rightarrow \exists x_{1,2} \in \mathbb{R}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$. $S_0 = 2 \in \mathbb{Z}$.

Din relațiile lui $S = x_1 + x_2 = 2016$ și $P = x_1x_2 = 1$, deci $S_1 = S \in \mathbb{Z}$,

$S_2 = S^2 - 2P \in \mathbb{Z}$. **3p**

$$S \cdot S_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = S_{n+1} + P \cdot S_{n-1}$$

Dacă $S_{n-1}, S_n \in \mathbb{Z}$, atunci $S_{n+1} = S \cdot S_n - P \cdot S_{n-1} \in \mathbb{Z}$. **3p**

Deoarece $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$, rezultă prin inducție că $S_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **1p**

Soluție

2. Determinați cel mai mare număr natural k pentru care $(2013! + 2014! + 2015!) \vdots 2015^k$

Soluție

$A = 2013!(1 + 2014 + 2014 \cdot 2015) \Rightarrow A = 2013! \cdot 2015^2$ ....

Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, numărul 2015 ca divizor, apare din produsul numerelor prime 5, 13,31 din produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 62 \cdot \ldots \cdot 2013$. ....

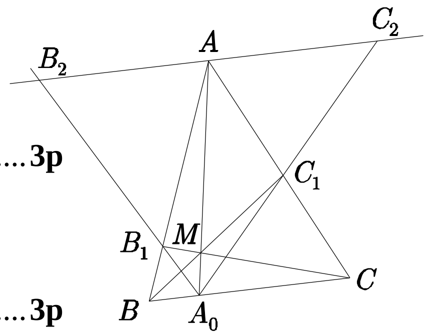
Trebuie să numărăm doar numărul de multiplicitate al factorului 31pentru că aceasta apare de cele mai puține ori. ....

$2013 = 64 \cdot 31 + 29 \Rightarrow$ în produsul $2013!$ sunt 64 multipli de 31 și 31 mai apare încă de două ori în multiplul $31 \cdot 31 = 961$ și $2 \cdot 31 \cdot 31 = 62 \cdot 31 = 1922$, deci în total de 66 ori. ....

Observație : în general numărul prim p apare ca factor în numărul $n!$ de $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right]$ ori, unde m este cea mai mare putere pentru care $p^m \le n$ și $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Deci $k = 66 + 2 = 68$ ....

3. Pe latura BC a triunghiului ABC considerăm un punct A_0 și pe AA_0 un punct M. Notăm cu C_1 și B_1 punctele de intersecție $BM \cap AC$ și $CM \cap AB$. Dreapta paralelă la BC prin punctul A -intersectează dreptele A_0B_1 și A_0C_1 în punctele B_2 și C_2. Arătați că punctul A este mijlocul segmentului $[B_2C_2]$.



Din teorema lui Ceva există $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{k_2}{k_1}$, $\frac{BA_0}{A_0C} = \frac{k_3}{k_2}$

şi $\frac{CC_1}{C_1A} = \frac{k_1}{k_3}$, ...

atunci $\overrightarrow{AC_2} = \frac{k_2k_3}{k_1(k_2+k_3)}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AB_2} = \frac{k_2k_3}{k_1(k_2+k_3)}\overrightarrow{CB}$, ...

deci $\overrightarrow{AC_2} = -\overrightarrow{AB_2}$. ....

4. Un ceas mecanic are un defect de fabricație. Astfel secundarul funcționează corect (sare una la o secundă), iar minutarul sare una la 90 de secunde, orarul sare una la fiecare 12 sărituri ale minutarului (ceasul are 60 de gradații).

a) De câte ori se suprapune secundarul și minutarul în decursul a 90 de minute?

b) În trei zile câte momente există în care și acest ceas și unul fără defect are cele trei ace de ceasornic suprapuse?

Soluție

a) Minutarul în 90 de minute face o singură rotație. La fiecare rotație a secundarului, acesta se suprapune cu minutarul exact o singură dată, deci în total de 90 ori.

....**2p**

b) Determinăm unghiul format de acele ceasului la m ore, n minute şi k secunde, cu poziţia acelor la ora $12,00$.

Secundarul formează un unghi de măsură $k \cdot \frac{2\pi}{60}$.

Minutarul formează un unghi de măsură $\left[\frac{60n+k}{90}\right] \cdot \frac{2\pi}{60}$. **2p**

Cele două ace se suprapun, dacă $\left[\frac{60n+k}{90}\right] = k$.

La un ceas fără defect cele două ace se suprapun dacă $n = k$. **1p**

Deci egalitatea $\left[\frac{60n+k}{90}\right] = \left[\frac{61k}{90}\right] = k$ are loc dacă şi numai dacă $k = 0$, adică la ore fixe. **2p**

Orarul pe un ceas fără defect este la poziția “12.00” de două ori pe zi, la 12.00 și la 24.00. Orarul la un ceas defect este la poziția 12.00 din 18 în 18 ore. Deci pe cele două ceasuri cele trei ace se suprapun simultan la fiecare 36 de ore. Deci în decursul a trei zile există 3 astfel de momente, dacă în momentul inițial sunt suprapuse, altfel sunt două astfel de momente **1p**