

PROGRAMA DE OLIMPIADĂ ȘCOLARĂ LA MATEMATICĂ

- FAZA LOCALĂ 2015 – 2016 -

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse în mod implicit conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoștințele suplimentare față de programa școlară pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

Clasa a V-a

• Etapa locală

Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Metoda comparației. Metoda grafică. Metoda falsei ipotezei. Metoda mersului invers. Probleme de mișcare. Probleme de numărare. Principiul cutiei (Principiul lui Dirichlet). Metoda reducerii la absurd.

Numere naturale

Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Sisteme de numerație. Divizibilitatea în \mathbf{N} . Numere prime. Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi.

Mulțimi

Clasa a VI-a

• Etapa locală

ALGEBRĂ

1. Numere naturale

Proprietățile divizibilității în \mathbf{N} .

Criteriile de divizibilitate cu: 2; 5; 10; 2^n ; 5^n ; 3; 9; 7; 11; 13. Numere prime și numere compuse.

Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.; $[a;b] \cdot (a;b) = a \cdot b$. Numere prime între ele. a/bc și $(a;b)=1 \Rightarrow a/c$. Dacă $(a;b) = d \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât $(x; y) = 1$ și $a = xd$; $b = yd$. Dacă $[a;b] = m \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât $(x; y) = 1$ și $m = ax$; $m = by$.

2. Operații cu numere raționale pozitive

3. Ecuații în \mathbf{Q}_+

GEOMETRIE

1. Punct. Dreaptă. Semidreaptă. Segment (conținutul programei școlare).

2. Unghi (conținutul programei școlare și, în plus, teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf).

3. Congruența triunghiurilor (conținutul programei școlare și cazul L.U.U.)

Clasa a VII-a

ALGEBRĂ

1. Mulțimea numerelor întregi; Mulțimea numerelor raționale; Mulțimea numerelor reale;

2. Modulul unui număr real. Proprietăți: a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$; b) $|x| = \max(-x; x), \forall x \in \mathbf{R}$; c)

$$|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbf{R};$$

d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}^*$; e) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$; f) $|x| \leq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; g)

$$|x| \geq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \geq a \text{ sau } x \leq -a; \text{ h) } \sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbf{R}.$$

3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real; Reguli de calcul cu radicali (conținutul programei școlare).

a) Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$; b) Dacă $a, b \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$;

c) Dacă a și b nu sunt pătrate ale unor numere raționale, atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$; d) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ și

$\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât, atunci $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$; e) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ astfel

încât $\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $a\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; f) Dacă $a \in \mathbf{Q}^*$ și $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

și $ab \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; g) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ și $c^2 = a^2 - b$ (formula radicalilor dubli).

GEOMETRIE

1. Patrulatele. Paralelogram. Pătrat. Dreptunghi. Romb. Trapez. Aree ale triunghiurilor și patrulatelelor studiate.

2. Asemănarea triunghiurilor. Teorema lui Thales

Clasa a VIII-a

ALGEBRĂ

1. Numere reale

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Ecuații. Modulul unui număr real. Ecuații.

Intervale. Intersecția și reuniunea intervalelor. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ și $a \pm \sqrt{b}$,

$a, b \in \mathbf{N}$. Formulele de calcul prescurtat: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3. \text{ Rapoarte de numere reale}$$

reprezentate prin litere. Operații.

GEOMETRIE

1. Probleme elementare de loc geometric.

2. Puncte, drepte, plane. Paralelism.

La conținutul programei școlare se adaugă: teoreme de paralelism; teorema lui Menelaos în spațiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaos; teorema lui Thales în spațiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulate regulate; simetria față de un plan; secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

3. Proiecții ortogonale pe un plan

La conținutul programei școlare se adaugă: perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector.

Clasa a IX-a

ALGEBRĂ

Mulțimi și elemente de logică matematică

- Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracționară a unui număr real; operații cu intervale de numere reale.
- Propoziție, predicat, cuantificatori.
- Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate, regulile lui De Morgan).
- Tipuri de raționamente logice: inducția matematică. Probleme de numărare.

Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} (șir)

- Modalități de a defini un șir, șiruri mărginite, șiruri monotone; exemple simple
- Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcție de un termen dat și rație, suma primilor n termeni ai unei progresii
- Condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.

GEOMETRIE

Vectori în plan

- Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari.
- Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare, înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli.

Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană

- Vectorul de poziție al unui punct.
- Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism).
- Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi).
- Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi; ortocentrul unui triunghi; relația lui Sylvester, concurența înălțimilor.
- Teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.

Clasa a X-a

ALGEBRĂ

Mulțimi de numere

- Numere reale: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv, aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale.
- Radical dintr-un număr rațional, $n \geq 2$, proprietăți ale radicalilor.
- Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare.

- Mulțimea \mathbb{C} . Numere complexe sub forma algebrică, conjugatul unui număr complex operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real.
- Rezolvarea în \mathbb{C} ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Ecuații bipătrate.
- Numere complexe sub forma trigonometrică (coordonate polare în plan), înmulțirea numerelor complexe și interpretare geometrică, ridicarea la putere (formula lui Moivre).
- Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome.

Funcții și ecuații

- Funcția putere cu exponent natural
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$, $f(x)=x^n$ și $n \geq 2$.
- Funcția radical f: $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$, unde $\mathbb{D}=[0, \infty)$ pentru n par și $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ pentru n impar;
- Funcția exponențială f: $\mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$, $f(x)=a^x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmică f: $(0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, creștere exponențială, creștere logaritmică.
- Funcții trigonometrice directe și inverse.
- Ecuații iraționale.
- Ecuații exponențiale.
- Ecuații logaritmice.

Clasa a XI-a

Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

Permutări

- Noțiunea de permutare, operații, proprietăți.
- Inversiuni, semnul unei permutări.
- Transpozitii; descompunerea unei permutari în produs de transpozitii

Matrice

- Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice.
- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu scalar, proprietăți.
- Puterile unei matrice: metode de calcul
- Relatia Cayley-Hamilton, utilizarea în metode de calcul a puterilor unei matrice

Determinanți

- Determinant de ordin n , proprietăți.
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan.
- Rangul unei matrice.

Elemente de analiză matematică

Limite de funcții

- Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$.
- Funcții reale de variabilă reală : funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritm, funcția exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse.
- Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți.
- Șiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, șiruri convergente: exemple semnificative: $(a^n)_n$, $(n^a)_n$, $((1+1/n)^n)_n$, operații cu șiruri convergente, convergența șirurilor utilizând proprietatea Weierstrass. Numărul e ; limita șirului $((1+u_n)^{1/u_n})_n$; $u_n \rightarrow 0$.
- Criteriul lui Cesaro-Stolz
- Șiruri remarcabile (Euler, Lalescu, Wallis, Stirling)
- Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, calculul limitelor laterale.

- Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții : $0/0$, ∞/∞ , $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .
- Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, oblice.

Clasa a XII-a

Elemente de algebră

Grupuri

- Lege de compoziție internă, tabla operației.
- Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, \mathbf{Z}_n ; ordinul unui element al unui grup; teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri; condiții suficiente de comutativitate în grupuri.
- Morfism și izomorfism de grupuri.

Elemente de analiză matematică

- Probleme care conduc la noțiunea de integrală.
- **Primitive** (antiderivate)
 - Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale.
- Metode de calcul a primitivelor : - schimbarea de variabilă
 - calculul primitivelor unor funcții iraționale
 - calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice.
- **Integrala definită.**