Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
VIII. OSZTÁLY

1. feladat. Igazold, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalainak hosszai, akkor:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

2. feladat. Minden a természetes szám esetén értelmezzük a következő halmazt:

$$A_a=\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{n^2+an} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Igazold, hogy az A_a halmaz akkor és csak akkor véges, ha $a \neq 0$.

b) Határozd meg az A_{40} halmaz legnagyobb elemét!

Gazeta Matematică

3. feladat. Határozd meg az

$$M=\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}\right\}$$

halmaz elemeinek számát!

4. feladat. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest és $AB' \cap A'B=\{O\}$. A $[BC]$ élen felvesszük az N pontot úgy, hogy $AC' \parallel (B'AN)$. Ha tudjuk, hogy $D'O \perp (B'AN)$, bizonyítsd be, hogy $ABCDA'B'C'D'$ kocka!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Soluţie

Deoarece a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $-a+b+c$, $a-b+c$ şi $a+b-c$ sunt strict pozitive. Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică avem

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}=\sqrt{1\cdot\frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1+\frac{a}{-a+b+c}}=\frac{2a}{b+c}$$

şi analoagele **3p**

Este suficient să demonstrăm că $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

Notând $b+c=x$, $a+c=y$, $b+c=z$, obţinem $a=\dfrac{-x+y+z}{2}$, $b=\dfrac{x-y+z}{2}$ şi $c=\dfrac{x+y-z}{2}$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1 \geq 3$$

care este adevărată, deoarece $u+\dfrac{1}{u} \geq 2$, pentru orice $u>0$ **4p**

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulţimea

$$A_a=\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{n^2+an} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Arătaţi că mulţimea A_a este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii A_{40}.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Dacă $a=0$ atunci $A=\mathbb{N}$, care este infinită **1p**

Dacă $a \neq 0$ atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2+an=p^2$ **1p**

Obţinem $4n^2+4an+a^2=4p^2+a^2$, de unde $(2n+a-2p)(2n+a+2p)=a^2$ **1p**

Ca urmare, $2n+a+2p$ este divizor al lui a^2 (care este nenul), deci $2n<2n+a+2p \leq a^2$, de unde rezultă că n poate lua un număr finit de valori, adică A este finită **2p**

b) Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care n^2+40n este pătrat perfect. Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2=n^2+40n$.

Obţinem $p^2+400=(n+20)^2$, de unde $(n+20-p)(n+20+p)=400$. Numerele $p-n-20$ şi $p+n+20$ au aceeaşi paritate, deci vor fi pare. Avem $2\cdot 200=4\cdot 100=8\cdot 50=400$, de unde $n \in \{81, 32, 9\}$. Elementul căutat este 81. .... **2p**

Problema 3. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2016}} \right\}.$$

Soluţie Fie $(x,y) \in M$. Cum $\sqrt{2016} = 12\sqrt{14}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} - \frac{1}{\sqrt{14y}} = \frac{1}{2016} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} = \frac{1}{\sqrt{14y}} + \frac{1}{2016}.$$

Prin ridicare la pătrat obţinem $\dfrac{1}{14x} = \dfrac{1}{14y} + \dfrac{1}{2016} + \dfrac{1}{1008\sqrt{14y}}$, de unde $\sqrt{14y} \in \mathbb{Q}$ şi, ca urmare $\sqrt{14x} \in \mathbb{Q}$.

Atunci există numerele naturale nenule a, b pentru care $x = 14a$ şi $y = 14b$. **3p**

Înlocuind în relaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{12\sqrt{14}}$, obţinem $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{12}$, de unde $a = \dfrac{12b}{b+12}$. **2p**

Din $\dfrac{12b}{b+12} \in \mathbb{N}$ rezultă $b + 12 \mid 144$, deci $b \in \{4, 6, 12, 24, 36, 60, 132\}$, de unde $a \in \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

În concluzie, mulţimea M admite 7 elemente. **2p**

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi $AB' \cap A'B = \{O\}$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $A'C \parallel (B'AN)$. Ştiind că $D'O \perp (B'AN)$ demonstraţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Soluţie

Din $D'A' \perp (ABB')$ şi $D'O \perp AB'$ obţinem $A'O \perp AB'$, deci $ABB'A'$ este pătrat. **2p**

Apoi $A'C \parallel (ANB')$ şi $(ANB') \cap (A'BC) = ON$, deci $A'C \parallel ON$. Cum O este mijlocul segmentului $[A'B]$ atunci N este mijlocul segmentului $[BC]$. **1p**

În dreptunghiul $A'BCD'$, avem $m(\sphericalangle D'ON) = 90°$, de unde $\Delta D'A'O \sim \Delta OBN$. Atunci $\dfrac{D'A'}{A'O} = \dfrac{OB}{ON}$, ceea ce conduce la $\dfrac{A'B^2}{4} = \dfrac{A'D'^2}{2}$, deci $A'B = A'D\sqrt{2}$. Obţinem $A'D = A'A$, deci $AA'D'D$ este pătrat. **3p**

Concluzia se obţine remarcând că $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipided dreptunghic cu toate feţele laterale pătrate, deci este cub. **1p**