OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. a) Să se arate că numărul $A = \sqrt{2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2}$ este iraţional pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se demonstreze că dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x + y + z = 1344$, atunci

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y\,(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leqslant 2016.$$

PROBLEMA 2. a) Să se arate că $x^2 + x - 2 = (x-1)\,(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) Determinaţi numerele naturale a, b şi numărul natural prim p, ştiind că $a^2 + a = p^{2^b} + 2$.

PROBLEMA 3. Fie ABCD un paralelogram cu $AB = n \cdot AD$, unde $n \in \mathbb{R},\ n > 2$. Bisectorele unghiurilor paralelogramului se intersectează astfel: bisectoarea unghiului A se intersectează cu bisectoarea unghiului B în punctul R, bisectoarea unghiului B cu bisectoarea unghiului C în S, bisectoarea unghiului C cu bisectoarea unghiului D în T şi bisectoarea unghiului D cu bisectoarea unghiului A în Q.

a) Demonstraţi că $RSTQ$ este dreptunghi;
b) Dacă $AB \cap DT = \{P\}$, demonstraţi că $\dfrac{A_{ADP}}{A_{ARB}} = \dfrac{2}{n^2}$;
c) Demonstraţi că dreptele $RT,\ AC$ şi DB sunt concurente.

PROBLEMA 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[BD$, $[CE$ bisectoarele sale ($D \in AC$, $E \in AB$). Se notează cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F, respectiv G, proiecţiile punctelor D şi E pe dreapta BC. Să se determine măsura unghiului FIG.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

(3p) a) Ultima cifră a numărului $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ este $\begin{cases} 3, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 7, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

(1p) Deci $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ nu este pătrat perfect, de unde $A \notin \mathbb{Q}$

(2p) b) Avem: $\sqrt{x(y+z)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2}$, $\sqrt{y(x+z)} \leqslant \dfrac{y+(x+z)}{2}$, $\sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{z+(x+y)}{2}$

(1p) Deci: $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2} + \dfrac{y+(x+z)}{2} + \dfrac{z+(x+y)}{2} =$
$\dfrac{3(x+y+z)}{2} = \dfrac{3 \cdot 1344}{2} = 2016$

PROBLEMA 2.

(2p) a) Se arată că $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

(1p) b) Deoarece numărul $a^2 + a = a(a+1)$ este par, rezultă că şi numărul $p^{2^b} + 2$ este par. Deci $p = 2$, iar relaţia din enunţ devine: $a^2 + a - 2 = 2^{2^b} \iff (a-1)(a+2) = 2^{2^b}$

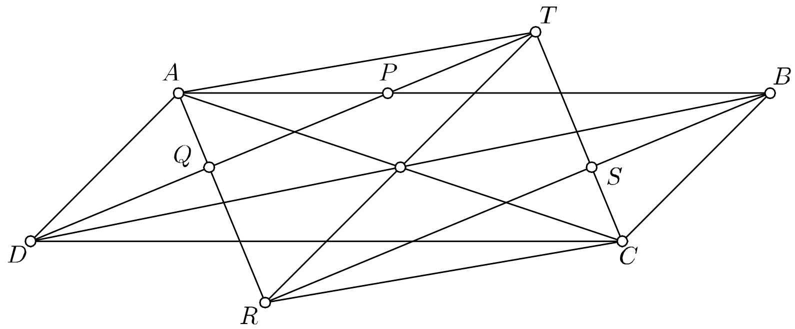
(1p) Deoarece membrul drept este par, iar numerele $a-1$ şi $a+2$ au parităţi diferite, singurele posibilităţi sunt: $\begin{cases} a-1=1 \\ a+2=2^{2^b} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-1=2^{2^b} \\ a+2=1 \end{cases}$

(1p) Pentru $a+2=1$, nu avem soluţii

(2p) Pentru $\begin{cases} a-1=1 \\ a+2=2^{2^b} \end{cases}$ se obţine $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Soluţia $(p, a, b) = (2, 2, 1)$

PROBLEMA 3.



(1p) a) $\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{A}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{D}\right)=90^\circ$, rezultă $\mathrm{m}\left(\widehat{TQR}\right)=90^\circ$

(1p) se demonstrează că patrulaterul $RSTQ$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi

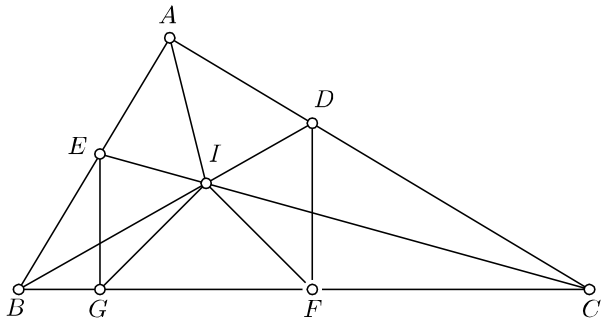
(1p) b) $\Delta AQD \sim \Delta ARB \Rightarrow \frac{A_{AQD}}{A_{ARB}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{1}{n^2}$

(1p) $\Delta AQD \equiv \Delta AQP \Rightarrow A_{ADP}=2\cdot A_{AQD} \Rightarrow \frac{A_{ADP}}{A_{ARB}}=\frac{2}{n^2}$

(2p) c) Se demonstrează că $ATCR$ este paralelogram, de unde rezultă că $[RT]$ şi $[AC]$ au acelaşi mijloc

(1p) În paralelogramul $ABCD$, diagonalele AC şi BD au acelaşi mijloc, de unde rezultă concurenţa dreptelor RT, AC şi DB

PROBLEMA 4.



(1p) Deoarece $[BI$ şi $[BI$ sunt bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow [AI$ este bisectoare în ΔABC

$\Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BAI})=45^\circ$

(2p) Deoarece $[BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, rezultă că $DA=DF$ şi $AB=BF$

(2p) $\Delta AIB \equiv \Delta FIB \Rightarrow \widehat{BAI} \equiv \widehat{BFI} \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BFI})=45^\circ$

(2p) Analog se arată că $\mathrm{m}(\widehat{FGI})=45^\circ$ şi din ΔFIG avem $\mathrm{m}(\widehat{FIG})=90^\circ$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.