INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 28 februarie 2016

CLASA a XI – a

1. Se consideră determinantul $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi D_4 şi D_5;

b) Demonstraţi că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $D_n < 0$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\ge1}$, definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi $x_{n+2} = 2x_{n+1} + \sqrt{x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}\cdot x_n + 2\cdot x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că funcţia $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)(2x-1)}}{x}$ este crescătoare;

b) Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\ge1}$, $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{2x_n}$ este convergent;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{2016}}$.

Dana Heuberger

3. Fie şirul $(x_n)_{n\ge1}$, definit prin $x_1 \in (1, 2)$ şi $2x_{n+1} + x_n^2 = 2(x_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $x_n \in (1, 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Considerând şirul convergent, calculaţi limita sa;

c) Demonstraţi că şirul este convergent.

G.M. 1 / 2016 – 27175 (modificată)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Dana Heuberger, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai” Baia Mare.

prof. Gheorghe Sfara, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu” Baia Mare

prof. Cristian Heuberger, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai” Baia Mare.

SUCCES!

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN MARAMUREȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NATIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 28 februarie 2016

CLASA a XI – a
(Barem)

1. **a)** $D_4 = -160$ şi $D_5 = 1875$ .... 4 p

b)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1:\, c_1+c_2+\ldots+c_n}{=} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2:\, c_2-2c_1 \\ c_3:\, c_3-3c_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_n:\, c_n-n\cdot c_1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{dezvoltăm după } l_1}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2:\, l_2-2l_1 \\ l_3:\, l_3-3l_1 \\ \dots\dots\dots \\ l_{n-1}:\, l_{n-1}-(n-1)l_1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{schimbăm } l_1 \text{ cu } l_2 \\ \text{noua } l_2 \text{ o schimbăm cu } l_3 \\ \text{noua } l_3 \text{ o schimbăm cu } l_3 \\ \text{samd}}}{=} -(-1)^{n-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -(-1)^{n-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$ 2p

Evident că pentru toate valorile naturale nenule pare are loc $D_n < 0$........ 1p

2.	**a)**	$f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-3\cdot\dfrac{1}{x}+2}=\sqrt{x}\circ\left(x^2-3x+2\right)\circ\dfrac{1}{x}$. Funcția f este o compunere de trei funcții, prima strict crescătoare, a doua strict descrescătoare pe $(0,1)$ $\left(\text{adică acolo unde se află } \dfrac{1}{x}\right)$ și a treia strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare. 2p
	b)	Se arată ușor că $x_n\geq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. De asemenea $x_{n+1}>2x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că toți termenii șirului $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt supraunitari. Împărțind relația de recurență cu $2\cdot x_{n+1}$ obținem $y_{n+1}=1+\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{y_n}+\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{y_n^2}}=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2y_n^2-3y_n+1}}{y_n}=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot f\left(y_n\right).$ (*) $x_1=1;\ x_2=3\ \Rightarrow\ x_3=6+\sqrt{2}$. Rezultă $y_1=\dfrac{3}{2}$ și $y_2=\dfrac{6+\sqrt{2}}{6}$. Evident $y_1>y_2$. Funcția f fiind strict crescătoare avem $y_1>y_2\Rightarrow f\left(y_1\right)>f\left(y_2\right)$ și coroborat cu relația (*) se obține $y_2>y_3$. Continuând raționamentul deducem că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Fiind mărginit inferior de 1, șirul este convergent. 3p
	c)	$x_n\geq 2x_{n-1}\geq 2\cdot 2x_{n-2}\geq\ldots\geq 2^{n-1}\cdot x_1=2^{n-1}$. Rezultă $\dfrac{x_n}{n^{2016}}\geq\dfrac{2^{n-1}}{n^{2016}}\to+\infty$ Conform teoremei comparației $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^{2016}}=+\infty$. 2p
3.	**a)**	Fie $L\in\mathbb{R}$ limita șirului. Trecând la limită în relația de recurență obținem $2L+L^2=2(L+1)$. Cum $L\in[1,2]$, rezultă $L=\sqrt{2}$. 1p
	b)	Dacă $x_1=\sqrt{2}$ șirul este constant $\sqrt{2}$, fiind așadar convergent la $\sqrt{2}$. Dacă $x_1\in\left(1,\sqrt{2}\right)$, atunci $x_2=\dfrac{1}{2}\left(3-\underbrace{\left(x_1-1\right)^2}_{\in\left(0,\,3-2\sqrt{2}\right)}\right)\in\left(\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\sqrt{2},2\right)$. $x_3=\dfrac{1}{2}\left(3-\underbrace{\left(x_2-1\right)^2}_{\in\left(3-2\sqrt{2},\,1\right)}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right)$. Evident că, inductiv, toți termenii de rang impar sunt în $\left(1,\sqrt{2}\right)$ și toți cei de rang par sunt în $\left(\sqrt{2},2\right)$. 2p

$$x_{n+2}=-\frac{1}{2}x_{n+1}^2+x_{n+1}+1=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_n^2+x_n+1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x_n^2+x_n+1\right)+1$$

Obținem $x_{n+2}=-\frac{1}{8}x_n^4+\frac{1}{2}x_n^3-\frac{1}{2}x_n^2+\frac{3}{2}$ (*)

$$x_{n+2}-x_n==-\frac{1}{8}x_n^4+\frac{1}{2}x_n^3-\frac{1}{2}x_n^2-x_n+\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}\left(x_n-\sqrt{2}\right)\underbrace{\left(x_n+\sqrt{2}\right)\left(x_n^2-4x_n+6\right)}_{>0}.$$

Se deduce imediat că subșirul termenilor de rang impar este strict crescător, iar subșirul termenilor de rang par este strict descrescător. Cum ambele sunt mărginite, rezultă că ambele subșiruri sunt convergente.

Dacă a și b reprezintă limitele celor două subșiruri, trecând la limită în relația de recurență (*) obținem $a=-\frac{1}{8}a^4+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}$ și similar pentru b.

Rezultă $\frac{1}{8}\left(a-\sqrt{2}\right)\underbrace{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-4a+6\right)}_{>0}=0$ și deci $a=\sqrt{2}$. Analog $b=\sqrt{2}$.

Așadar șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent la $\sqrt{2}$.

Similar pentru cazul în care $x_1\in\left(\sqrt{2},2\right)$. 2p