INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GORJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , CLASA a X - a

22 FEBRUARIE 2014

1. a) Să se demonstreze că $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$ pentru orice numere $a,b,c>0$.

b) Fie numerele $a,b,c>0$ astfel încât $3^{\frac{a+b}{c}}+3^{\frac{b+c}{a}}+3^{\frac{c+a}{b}}=27$. Să se arate că $a=b=c$.

Supliment G.M. 12/2013

2. a) Să se arate că numărul $\log_2 3$ este iraţional.

b) Să se determine $a>0$ astfel încât numerele $\log_2 a$ şi $\log_3 a$ să fie raţionale.

c) Există oare două numere iraţionale a şi b astfel încât numărul a^b să fie raţional? Justificare.

***

3. a) Fie z un număr complex astfel încât z^2 să fie număr real pozitiv. Atunci z este număr real.

b) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1-z_2|=1, |z_2-z_3|=\sqrt{2}$ şi $|z_3-z_1|=\sqrt{3}$. Să se arate că $|z_1-2z_2+z_3|=\sqrt{3}$.

***

4. Spunem că două funcţii $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ au proprietatea (P) dacă $f(n)+g(n)=2n$ pentru orice număr natural n.

a) Să se arate că dacă două funcţii injective $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ au proprietatea (P) atunci $f=g=id_{\mathbb{N}}$.

b) Să se dea exemplu de două funcţii surjective $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ cu proprietatea (P) astfel încât $f\neq id_{\mathbb{N}}$ şi $g\neq id_{\mathbb{N}}$.

(Prin $id_{\mathbb{N}}$ se înţelege funcţia $id_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $id_{\mathbb{N}}(n)=n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$)

Subiecte propuse de prof. Constantinescu Mircea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 7 la 0.

BAREM CLASA A X-A

1

a) 3p

b) Folosind inegalitatea mediilor obţinem $3^{\frac{a+b}{c}}+3^{\frac{b+c}{a}}+3^{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt[3]{3^{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}}}\geq 27$ (3p)

Egalitatea are loc dacă $a=b=c$ (1p)

2 a) Presupunând că $\log_2 3=\frac{m}{n}, m,n\in\mathbb{N}^*$, se obţine că $2^m=3^n$, contradicţie (2p)

b) Dacă $a\neq 1$ se obţine că $\log_2 3=\frac{\log_2 a}{\log_3 a}\in\mathbb{Q}$, fals, deci $a=1$ care verifică (2p)

c) Există. De exemplu $a=\sqrt{2}, b=\log_{\sqrt{2}}3$; $a^b=3\in\mathbb{Q}$, dar $a,b\notin\mathbb{Q}$ (3p)

3 a) Dacă $z=a+bi$ se obţine că $a^2-b^2+2abi>0$, de unde $ab=0$ (2p)

Dacă $a=0$ rezultă că $z^2=-b^2\leq 0$, fals. Deci $b=0$ şi deci $z\in\mathbb{R}$ (1p)

b) Dacă $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ se obţine că $AB^2+BC^2=AC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B. Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci $AC=2BM$, adică $|z_1-2z_2+z_3|=\sqrt{3}$. (4p)

4. a) Prin inducţie după n. Din $f(0)+g(0)=0$, se obţine că $f(0)=g(0)=0$. Presupunem că $f(k)=g(k)=k$, pentru orice $k\leq n$, unde $n\in\mathbb{N}$ fixat. Cum f, g sunt injective se obţine că $f(n+1)\geq n+1, g(n+1)\geq n+1$, deci $f(n+1)+g(n+1)\geq 2n+2$, cu egalitate dacă $f(n+1)=g(n+1)=n+1$ (3p)

b) De exemplu $f, g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\frac{n}{2}$ pentru n par şi $f(n)=\frac{3n-1}{2}$ pentru n impar, iar $g(n)=2n-f(n), n\in\mathbb{N}$ (4p)