INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , CLASA a IX - a

22 FEBRUARIE 2014

SUBIECTUL I

Arătați că $\forall x, y, z > 0$ **avem:** $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq 4(x - z)$

SUBIECTUL II

În triunghiul ABC se consideră $M, P \in (AB); N, Q \in (AC)$ **și** $R \in (BC)$ **astfel încât** $AM \equiv MP \equiv PB$; $AN \equiv NQ \equiv QC$ **și** $BR \equiv RC$.

Fie $D \in (MN)$ **astfel încât** $\frac{MD}{DN} = \frac{1}{2}$.

Dacă $E \in (PQ)$ **arătaţi că ADRE este paralelogram** $\Leftrightarrow \frac{EP}{EQ} = \frac{7}{5}$

SUBIECTUL III

Arătaţi că orice poligon convex cu n laturi $n \geq 5$ **se poate descompune în pentagoane convexe.**

SUBIECTUL IV

a) Să se arate că dacă o progresie aritmetică infinită de numere naturale conţine un pătrat perfect, atunci conţine o infinitate de pătrate perfecte.

b) Demonstrati ca, daca $(a_n)_{n\geq 1}$ **este o progresie aritmetica formata din numere naturale nenule, atunci** $(a_{a_n})_{n\geq 1}$ **este progresie aritmetica.**

BAREM CLASA A IX-A

SUBIECTUL I

. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\geq\frac{(x+y)^2}{y+z}$ **(C.B.S) (2p)**

Arătăm că $\frac{(x+y)^2}{y+z}\geq 4(x-z) <=> x^2+2xy+y^2\geq 4(y+z)(x-z) <=>$

$x^2+2xy+y^2\geq 4(xy-yz+xz-z^2) <=> x^2+2xy+y^2\geq 4xy-4yz+4xz-4z^2 <=> x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4xz\geq 0$ **(3p)**

$$(x-y-2z)^2\geq 0$$ **(Adevărat) (2p)**

SUBIECTUL II

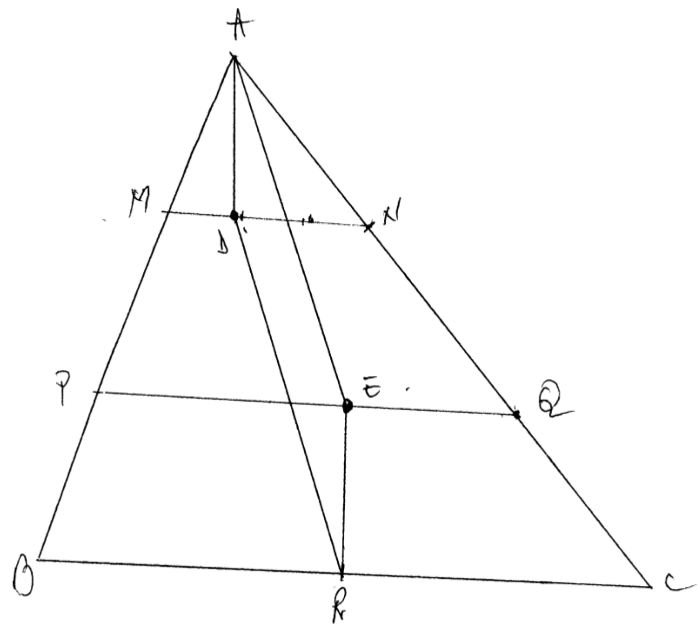
$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ **(1p)**

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{2}{9}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AC}$ **(1p)**

Fie k raportul în care punctul E împarte segmentul PQ.

Avem $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{1-k}\cdot\overrightarrow{AP}-\frac{k}{1-k}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3(1-k)}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{2k}{3(1-k)}\cdot\overrightarrow{AC}$ **(2p)**

ADRE = paralelogram <=> $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\ \overrightarrow{AR}$ **<=>** $\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3(1-k)}\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\left(\frac{1}{9}-\frac{2k}{3(1-k)}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$ **<=> k=-**$\frac{7}{5}$ $<=>\overrightarrow{EP}=\ -\frac{7}{5}\overrightarrow{EQ}$ **<=>**$\frac{EP}{EQ}=\frac{7}{5}$ **(3p)**



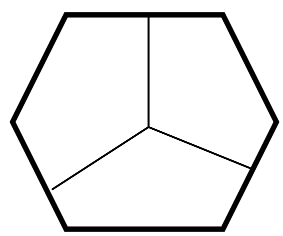
SUBIECTUL III

Vom justifica proprietatea prin inducţie matematică (de pas 3)

P(5) Adevărat (evident)

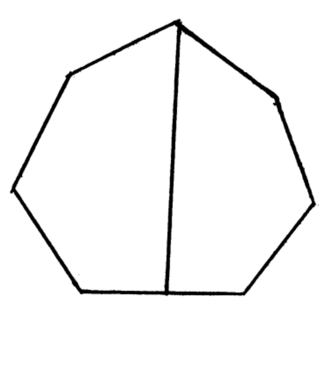
P(6) Adevărat

(1p)



P(7) Adevărat

(1p)



Presupunem acum că $n \geq 8$ şi că orice poligon convex cu m laturi cu $8 \leq m < n$ se poate descompune în pentagoane.

Fie A_1 A_2A_3.....A_n – un poligon cu n laturi.

Delimităm pentagonul $A_1A_2A_3A_4A_5$ (prin construcţia diagonalei A_1A_5 – sau pierdut astfel 4 laturi din poligonul iniţial şi s-a câştigat una,A_1A_5).

Deci poligonul $A_1A_5A_6$… A_n are n-3 laturi.

Dar $5 \leq n-3 < n$ deci conform presupunerii făcute acesta ($A_1A_5A_6$…A_n) poate fi descompus în pentagoane convexe. (5p)

SUBIECTUL IV

a)Cum $a_1,a_2 \in N => r = a_2 - a_1 \in N$., presupunem $a_k = m^2$ atunci

$a_{k+p} = a_k + pr = m^2 + pr$.(2p)

Cum $r \in N^*$ dacă luăm p=2m+r rezultă $a_{k+p} = m^2 + r(2m+r) = (m+r)^2$ şi apoi repetăm raţionamentul. (2p)

b) cunoasterea conditiilor de progresie (1p); demonstratia completa (2p)