Ministerul Educației și Cercetării Științifice
Inspectoratul Școlar Județean Vaslui

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ definit prin $a_1=\sqrt[4]{2015}$, $a_{n+1}=\sqrt[4]{2015+\sqrt[n+1]{a_n}}$ pentru orice $n\geq 1$. Să se calculeze $[a_1]+[a_2]+...+[a_{2015}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*.

Problema 2. Fie $n\in N, n\geq 2$ și numerele $z_1,z_2,...,z_n\in\mathbf{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=...=|z_n|=1$ și $z_1+z_2+...+z_n=0$.

a) Demonstrați că $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+...+|z-z_n|^2=n|z|^2+n$ pentru orice $z\in\mathbf{C}$.

b) Demonstrați că $|z-z_1|+|z-z_2|+...+|z-z_n|\leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z\in\mathbf{C}, |z|\leq 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Să se rezolve în **R** ecuația: $\left[\dfrac{x-2014}{2015}-\left[\dfrac{x}{2015}\right]\right]=\log_{2016}\left(\dfrac{x}{2014}\right)$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*.

Problema 4. Dacă $a,b,c\in[2,+\infty)$, atunci $\log_{b+c}a+\log_{c+a}b+\log_{a+b}c\geq\dfrac{3}{2}$.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative – Clasa a X-a

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ definit prin $a_1=\sqrt[4]{2015}$, $a_{n+1}=\sqrt[4]{2015+\sqrt[n+1]{a_n}}$ pentru orice $n\geq 1$.
Să se calculeze $[a_1]+[a_2]+...+[a_{2015}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*.

Soluție. $6^4=1296<2015<2401=7^4 \Leftrightarrow 6<\sqrt[4]{2015}<7 \Rightarrow [a_1]=6$ **(1p)**

$$6<a_1<7 \Rightarrow 2<\sqrt{6}<\sqrt{a_1}<\sqrt{7}<3 \Rightarrow 6<\sqrt[4]{2017}<\sqrt[4]{2015+\sqrt{a_1}}<\sqrt[4]{2018}<7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow [a_2]=6$ **(1p)**

Presupunem că $[a_k]=6$ și demonstrăm că $[a_{k+1}]=6$ pentru orice $k\geq 2$.

$$6<a_k<7 \Rightarrow 1<\sqrt[k+1]{6}<\sqrt[k+1]{a_k}<\sqrt[k+1]{7}<2 \Rightarrow \sqrt[4]{2016}<\sqrt[4]{2015+\sqrt[k+1]{a_k}}<\sqrt[4]{2017} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt[4]{2015+\sqrt[k+1]{a_k}}\right]=6 \Leftrightarrow [a_{k+1}]=6 \Rightarrow [a_n]=6, (\forall) n\geq 1.$$ **(4p)**

$[a_1]+[a_2]+...+[a_{2015}]=6\cdot 2015=12090$. **(1p)**

Problema 2. Fie $n\in N, n\geq 2$ și numerele $z_1,z_2,...,z_n\in \mathbf{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=...=|z_n|=1$ și $z_1+z_2+...+z_n=0$.

a) Demonstrați că $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+...+|z-z_n|^2=n|z|^2+n$ pentru orice $z\in \mathbf{C}$.

b) Demonstrați că $|z-z_1|+|z-z_2|+...+|z-z_n|\leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z\in \mathbf{C}, |z|\leq 1$.

Gazeta Matematică

Soluție. **a)** $\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(z-z_k)(\overline{z}-\overline{z_k})=n|z|^2-\overline{z}\cdot\sum_{k=1}^{n}z_k-z\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2=$ **(2p)**

$=n|z|^2-z\cdot\overline{\sum_{k=1}^{n}z_k}+n=n|z|^2+n$. **(1p)**

b) Conform inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz se obține:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2\right)\cdot n=n^2\cdot|z|^2+n^2\leq 2n^2 \Rightarrow$$ **(3p)**

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\right)\leq n\sqrt{2}.$$ **(1p)**

Problema 3. Să se rezolve în **R** ecuația: $\left[\frac{x-2014}{2015}-\left[\frac{x}{2015}\right]\right]=\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*.

Soluție. Condiție de existență a logaritmului: $x>0$

$$\left[\frac{x-2014}{2015}-\left[\frac{x}{2015}\right]\right]=\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{2015}-\left[\frac{x}{2015}\right]+\frac{1}{2015}\right]-1=\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]-1=\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)$$ **(2p)**

$$\left\{\frac{x}{2015}\right\}\in[0;1)\Rightarrow\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\in\left[\frac{1}{2015},\frac{2016}{2015}\right)\Rightarrow\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]\in\{0;1\}$$ **(1p)**

I. Dacă $\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=1$, atunci ecuația devine:

$$\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)=0\Leftrightarrow x=2014>0$$ **(1p)**

Verificăm dacă soluția obținută respectă condiția $\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=1$

$$\left[\left\{\frac{2014}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=\left[\frac{2014}{2015}+\frac{1}{2015}\right]=\left[\frac{2015}{2015}\right]=1$$ **(1p)**

II. Dacă $\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=0$, atunci ecuația devine:

$$\log_{2016}\left(\frac{x}{2014}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{2014}{2016}>0$$ **(1p)**

Verificăm dacă soluția obținută respectă condiția $\left[\left\{\frac{x}{2015}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=0$

$$\left[\left\{\frac{2014}{2015\cdot 2016}\right\}+\frac{1}{2015}\right]=\left[\frac{2014}{2015\cdot 2016}+\frac{1}{2015}\right]=\left[\frac{4030}{2015\cdot 2016}\right]=0$$ **(1p)**

Deci ecuația are soluțiile: $x_1=2014,\ x_2=\frac{2014}{2016}$.

Problema 4. Dacă $a,b,c \in [2,+\infty)$, atunci $\log_{b+c} a + \log_{c+a} b + \log_{a+b} c \geq \frac{3}{2}$.

Soluție.

$$a \geq 2, b \geq 2 \Rightarrow ab \geq a+b \Rightarrow \log_{a+b} c \geq \log_{ab} c = \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\left(\frac{2ab}{a+b} \geq \min(a,b) \geq 2 \Leftrightarrow ab \geq a+b\right) \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\log_{b+c} a + \log_{c+a} b + \log_{a+b} c \geq \frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} \qquad \textbf{(1p)}$$

Notăm $\lg a + \lg b = x, \lg b + \lg c = y, \lg c + \lg b = z$

$$\Rightarrow \lg a = \frac{x-y+z}{2}, \lg b = \frac{x+y-z}{2}, \lg c = \frac{-x+y+z}{2} \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \qquad \textbf{(1p)}$$

S-a folosit inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, (\forall) x, y > 0$ **(1p)**