OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XII-a
16.02.2013

Subiectul I.(40 puncte)

Pe mulțimea $G=(1,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\sqrt{(xy)^2-(x^2+y^2)+2}, \forall x,y\in G$.

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție;

b) Rezolvați ecuația $\lg(x*3)=\frac{1}{2}+\log_{100}x$;

c) Dacă notăm $A(x,n)=\underbrace{x*x*...*x}_{de\ n\ ori}$ şi cu B simetricul lui $A(2,2013)$ în raport cu legea „$*$ “, aflați B.

prof. Cristian Petru Pop,ISJ Cluj

Subiectul II.(20 puncte)

Să se determine $n\in\mathbb{N}$, astfel încât $I_n\in\mathbb{Q}$, unde $I_n=\int_0^1\frac{6x^3-9x^2+7x-2}{(3x^2-3x+2)^n}dx$

prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureşanu”Dej

Subiectul III.(20 puncte)

Calculați $I=\int\frac{\text{ctg}\,x}{\sin^n x+a^n}dx$,unde $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $a\geq 0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$

prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic "Avram Iancu" Cluj-Napoca

Subiectul IV.(10 puncte)

Fie $f:[0;1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă având proprietatea $\int_0^1 xf(x)dx\geq\ln 2$. Să se arate că există $a\in(0,1)$ astfel încât $a^2f(a)+af(a)-1=0$.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul”Turda

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ța Ştefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778
Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

Barem clasa a XII-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I

a) $e=\sqrt{2}\in G$ **(10 puncte)**

b) $x*3=\sqrt{8x^2-7}\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\notin G, x_2=\frac{7}{4}\in G$ **(10 puncte)**

c) $x'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\in G$ **(5 puncte)**

Se dem prin inducție că $A(x,n)=\sqrt{(x^2-1)^n+1}, \forall x\in(1,\infty)$ **(10 puncte)**

$\Rightarrow B=\sqrt{1+\frac{1}{3^{2013}}}$ **(5 puncte)**

Subiectul II.

Avem: $6x^3-9x^2+7x-2=(2x-1)(3x^2-3x+2)=\frac{1}{4}(2x-1)[3(2x-1)^2+5]$, iar

$(3x^2-3x+2)^n=\frac{1}{4^n}(12x^2-12x+8)^n=\frac{1}{4^n}[3(2x-1)^2+5]^n$; prin urmare, integrala devine

$$I_n=4^{n-1}\int_0^1\frac{(2x-1)[3(2x-1)^2+5]dx}{[3(2x-1)^2+5]^n}=4^{n-1}\int_0^1\frac{(2x-1)dx}{[3(2x-1)^2+5]^{n-1}}.$$ **(10 puncte)**

Făcând schimbarea de variabilă $2x-1=t$, aceasta devine: $I_n=4^{n-1}\int_{-1}^1\frac{tdt}{2(3t^2+5)^{n-1}}$.

Cum funcția $f:[-1,1]\to R$, $f(t)=\frac{t}{(3t^2+5)^{n-1}}$ este impară, rezultă că $I_n=0\in\mathbb{Q}\ \forall n\in N$. **(10 puncte)**

Subiectul III.

Cu substituția sinx=t > 0, cosxdx=dt obținem: $I'=\int\frac{dt}{t(t^n+a^n)}$.

1°. dacă a=0, atunci $I'=\int\frac{1}{t^{n+1}}dt=-\frac{1}{nt^n}+C$, deci $I=-\frac{1}{n\sin^n x}+C$; **(10 puncte)**

2°. dacă a > 0, atunci $I'=\int\frac{dt}{t(t^n+a^n)}=\frac{1}{a^n}\int\frac{(t^n+a^n)-t^n}{t(t^n+a^n)}dt=$

$$=\frac{1}{a^n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t^{n-1}}{t^n+a^n}\right)dt=\frac{1}{a^n}\int\frac{1}{t}dt-\frac{1}{na^n}\int\frac{(t^n+a^n)'}{t^n+a^n}dt=$$

$= \frac{1}{a^n}\ln t - \frac{1}{na^n}\ln(t^n + a^n) + \mathcal{C}$, deci

$I = \frac{1}{a^n}\ln\sin x - \frac{1}{na^n}\ln(\sin^n x + a^n) + \mathcal{C}$. **(10 puncte)**

Subiectul IV

Se consideră funcția $g:[0;1]\to\mathbf{R}$, $g(x) = x\cdot f(x) - \frac{1}{x+1}$; are loc $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x\cdot f(x)dx - \ln 2 \geq 0$ (*) . Din teorema de medie avem că $\exists c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 g(x)dx = g(c) \overset{(*)}{>} 0$; $g(0) = -1, g(c) > 0 \Rightarrow \exists\, a\in(0,c)\subset(0,1)$ astfel ca $g(a) = 0$. Prin urmare se obține $a\cdot f(a) - \frac{1}{1+a} = 0$ adică $a^2 f(a) + af(a) - 1 = 0$. **(10 puncte)**