

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

## CLASA A VII-A

- 1.) Se dă  $n = (-1)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-3)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot (-5)^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-6}$ . Determinați cel mai mare număr întreg nenul  $m$ , astfel încât  $\sqrt{2 \cdot \sqrt{n \cdot m}} \in \mathbf{Q}$ .
- 2.) Alinei i-a plăcut un pulover, l-a și cumpărat cu 80% din banii pe care îi avea. Mai târziu a primit de la bunica sa pentru ziua ei de naștere 30 lei. Și-a dat seama că dacă ar mări banii așa adunați cu 25%, ar avea atâția bani câți a avut înaintea cumpărării bluzei. Câți bani a avut inițial Alina?
- 3.) Se consideră un triunghi  $ABC$  și punctele  $M \in [AB]$  și  $N \in [AC]$  astfel încât  $AM = 3 \cdot MB$  și  $4 \cdot AN = 3 \cdot AC$ .
- a) Demonstrați că dreptele  $MN$  și  $BC$  sunt paralele.
- b) Să se determine raportul ariilor triunghiurilor  $AMN$  și  $ABC$ .
- 4.) În paralelogramul  $ABCD$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle CAD$  intersectează dreapta  $DC$  în  $E$ , iar dreapta  $BE$  intersectează dreapta  $AD$  în  $F$ . Să se arate că:  $\frac{AF}{AD} - \frac{AD}{AC} = 1$ .

**Notă:****Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.****Timp de lucru 3 ore**

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

## BAREM

## CLASA A VII-A

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$n = -1 \cdot 2^2 \cdot (-3)^{-3} \cdot 4^4 \cdot (-5)^5 \cdot 6^6 = -2^2 \cdot 3^{-3} \cdot 2^8 \cdot 5^{-5} \cdot (2 \cdot 3)^6$	<b>1p</b>
	$n = -2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^{-5} = \frac{-2^{16} \cdot 3^3}{5^5}$	<b>3p</b>
	$\sqrt{n \cdot m} \in Q \Rightarrow m \in Z_-$	<b>2p</b>
	$\sqrt{2 \cdot \sqrt{n \cdot m}} = \sqrt{\sqrt{4 \cdot n \cdot m}} \in Q \Rightarrow \sqrt{\sqrt{-2^2 \cdot \frac{2^{16} \cdot 3^3}{5^5} \cdot m}} = \sqrt{\sqrt{-\frac{2^{18} \cdot 3^3}{5^5} \cdot m}} \in Q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m = -3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot k^4 = -60k^4$ de unde pentru $k=1 \Rightarrow m_{\max} = -60$	<b>3p</b>
<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	Notăm cu x suma inițială. După cumpărarea bluzei Alina va avea $100\% - 80\% = 20\%$ din banii săi, deci $x \cdot \frac{20}{100}$ .	<b>1p</b>
	$x \cdot \frac{20}{100} + 30 + x \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{4} = x$	<b>3p</b>
	$30 + 7,5 = x \cdot \left(1 - \frac{20}{100} - \frac{5}{100}\right) \Rightarrow 37,5 = x \cdot \frac{75}{100}$	<b>3p</b>
	$x = 37,5 \cdot \frac{100}{75} \Rightarrow x = \frac{3750}{75} = 50$ Deci Alina a avut inițial 50 de lei.	<b>2p</b>
<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{1}$	<b>2p</b>
	$\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ , deci $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{1}$	<b>2p</b>
	Folosirea teoremei reciproce a teoremei lui Thales	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ de unde obținem $\frac{A_{AMN}}{A_{ABC}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	<b>3p</b>
<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$DE \parallel AB \Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle DFE \Rightarrow \frac{AF}{DF} = \frac{AB}{DE} \Leftrightarrow \frac{AF}{AF - DF} = \frac{AB}{AB - DE} \Leftrightarrow$	<b>3p</b>
	$\frac{AF}{AD} = \frac{AB}{EC}$ (1)	<b>1p</b>
	În $\triangle DAC$ , AE bisectoare $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{EC}$ (2)	<b>2p</b>
	Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AF}{AD} - \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{EC} - \frac{DE}{EC} = \frac{EC}{EC} = 1$ .	<b>3p</b>

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

## BAREM

## CLASA A VII-A

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$n = -1 \cdot 2^2 \cdot (-3)^{-3} \cdot 4^4 \cdot (-5)^5 \cdot 6^6 = -2^2 \cdot 3^{-3} \cdot 2^8 \cdot 5^{-5} \cdot (2 \cdot 3)^6$	<b>1p</b>
	$n = -2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^{-5} = \frac{-2^{16} \cdot 3^3}{5^5}$	<b>3p</b>
	$\sqrt{n \cdot m} \in Q \Rightarrow m \in Z_-$	<b>2p</b>
	$\sqrt{2 \cdot \sqrt{n \cdot m}} = \sqrt{\sqrt{4 \cdot n \cdot m}} \in Q \Rightarrow \sqrt{\sqrt{-2^2 \cdot \frac{2^{16} \cdot 3^3}{5^5} \cdot m}} = \sqrt{\sqrt{-\frac{2^{18} \cdot 3^3}{5^5} \cdot m}} \in Q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m = -3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot k^4 = -60k^4$ de unde pentru $k=1 \Rightarrow m_{\max} = -60$	<b>3p</b>
<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	Notăm cu x suma inițială. După cumpărarea bluzei Alina va avea $100\% - 80\% = 20\%$ din banii săi, deci $x \cdot \frac{20}{100}$ .	<b>1p</b>
	$x \cdot \frac{20}{100} + 30 + x \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{4} = x$	<b>3p</b>
	$30 + 7,5 = x \cdot \left(1 - \frac{20}{100} - \frac{5}{100}\right) \Rightarrow 37,5 = x \cdot \frac{75}{100}$	<b>3p</b>
	$x = 37,5 \cdot \frac{100}{75} \Rightarrow x = \frac{3750}{75} = 50$ Deci Alina a avut inițial 50 de lei.	<b>2p</b>
<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{1}$	<b>2p</b>
	$\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ , deci $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{1}$	<b>2p</b>
	Folosirea teoremei reciproce a teoremei lui Thales	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ de unde obținem $\frac{A_{AMN}}{A_{ABC}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	<b>3p</b>
<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$DE \parallel AB \Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle DFE \Rightarrow \frac{AF}{DF} = \frac{AB}{DE} \Leftrightarrow \frac{AF}{AF - DF} = \frac{AB}{AB - DE} \Leftrightarrow$	<b>3p</b>
	$\frac{AF}{AD} = \frac{AB}{EC}$ (1)	<b>1p</b>
	În $\triangle DAC$ , AE bisectoare $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{EC}$ (2)	<b>2p</b>
	Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AF}{AD} - \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{EC} - \frac{DE}{EC} = \frac{EC}{EC} = 1$ .	<b>3p</b>