Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left[\frac{x+7}{3}\right]+\left[\frac{x+4}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right].$$

Problemă prelucrată de

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{5}{6}$ şi $(n+1)\cdot a_{n+1}=(n-1)\cdot a_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Să se demonstreze că $a_1+a_2+a_3+...+a_n<2, (\forall)n\geq 1$.

Problemă selectată de

Viorica Bujor,profesor, Galaţi
din G.M.nr. 6-7-8, 2012

Problema 3. Fie numărul natural $a=\underbrace{111...11}_{(n-1)cifre}0\underbrace{222...22}_{n\ cifre}+x$, unde $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Să se determine $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ştiind că numărul a este pătrat perfect.

Ioan Toderiţă, profesor, Galaţi

Problema 4. În triunghiul ABC cu $BC=4$, $CA=6$, $AB=3$, notăm centrul de greutate cu G, iar centrul cercului înscris în triunghi cu I. Dacă $GI\cap AB=\{M\}$ şi $GI\cap AC=\{N\}$, să se calculeze valoarea rapoartelor $\frac{MB}{MA}$, $\frac{NC}{NA}$.

Iuliana Duma, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie-2013

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1,	$\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left[\frac{x+7}{3}\right]+\left[\frac{x+4}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]\Leftrightarrow$ $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]\Rightarrow\left\|\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}\right\|<1\Leftrightarrow\|x-5\|<6\Leftrightarrow -6<x-5<6\Leftrightarrow$ $-1<x<11\Leftrightarrow 0<\frac{x+1}{3}<4$;Notăm $\left[\frac{x+1}{3}\right]=k, k\in\{0,1,2,3\}$.	**2p**
	1. $k=0\Rightarrow\begin{cases}0\le\frac{x-1}{2}<1\\0\le\frac{x+1}{3}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x<3\\-1\le x<2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;2)$	**1p**
	2. $k=1\Rightarrow\begin{cases}1\le\frac{x-1}{2}<2\\1\le\frac{x+1}{3}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le x<5\\2\le x<5\end{cases}\Leftrightarrow x\in[3;5)$;	**1p**
	3. $k=2\Rightarrow\begin{cases}2\le\frac{x-1}{2}<3\\2\le\frac{x+1}{3}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\le x<7\\5\le x<8\end{cases}\Leftrightarrow x\in[5;7)$;	**1p**
	4. $k=3\Rightarrow\begin{cases}3\le\frac{x-1}{2}<4\\3\le\frac{x+1}{3}<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\le x<9\\8\le x<11\end{cases}\Leftrightarrow x\in[8;9)$;	**1p**
	$S=[1;2)\cup[3;7)\cup[8;9)$	**1p**

2.	$(n+1)\cdot a_{n+1}=(n-1)\cdot a_n \Leftrightarrow a_n=n\cdot a_n-(n+1)\cdot a_{n+1}$.(1) Dăm valori de la 2 la n în recurenţă şi se obţine: $a_2=2\cdot a_2-3\cdot a_3$ $a_3=3\cdot a_3-4\cdot a_4$ $a_4=4\cdot a_4-5\cdot a_5$ $\vdots$ $a_n=n\cdot a_n-(n+1)\cdot a_{n+1}$ Adunând aceste egalităţi, se obţine: $a_2+a_3+a_4+...+a_n=2\cdot a_2-(n+1)\cdot a_{n+1}\Rightarrow$ $a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n=a_1+2\cdot a_2-(n+1)\cdot a_{n+1}<a_1+2\cdot a_2=\frac{1}{3}+\frac{10}{6}=2.$ Se demonstrează că $a_{n+1}\geq 0$ din recurenţă.	**4p** **3p**
3.	$\underbrace{111...11}_{(n-1)cifre}0\underbrace{222...22}_{n\ cifre}=\underbrace{111...11}_{(n-1)cifre}\cdot 10^{n+1}+2\cdot\underbrace{111...11}_{n\ cifre}=\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+1}+2\cdot\frac{10^n-1}{9}=$ $\frac{10^{2n}-8\cdot 10^n-2}{9}=\frac{(10^n-4)^2-18}{9}=\left(\frac{10^n-4}{3}\right)^2-2.$ Se demonstrează prin inducţie matematică că $(10^n-4)\vdots 3,(\forall)n\in\mathbb{N}$ sau se demonstrează prin calcul direct: $10^n-4=1\underbrace{00...0}_{n\ ori}-4=\underbrace{999...9}_{n-1\ ori}6=3\cdot\underbrace{333...3}_{n-1\ ori}2.$ Aşadar, $\frac{10^n-4}{3}=\underbrace{333...3}_{n-1\ ori}2\in\mathbb{N},(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$ $a=\left(\underbrace{333...3}_{n-1\ ori}2\right)^2-2+x$ este pătrat perfect dacă $x=2.$	**4p** 2p 1p

4.	Notăm $\dfrac{MB}{MA}=x,\ \dfrac{NC}{NA}=y$. Din M, G, I coliniare $\Rightarrow x+y=1$ (1) Din M, I, N coliniare $\Rightarrow 6\cdot x+3\cdot y=4$ (2) Rezolvând sistemul, se obţine $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$	1p
	Demonstrarea condiţiilor (1), (2): $\overrightarrow{GM}=\dfrac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{GB}+\dfrac{x}{x+1}\cdot\overrightarrow{GA}$. Din $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}$, se obţine $\overrightarrow{GM}=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\overrightarrow{GB}-\dfrac{x}{1+x}\cdot\overrightarrow{GC}$. $\overrightarrow{GN}=\dfrac{1}{y+1}\cdot\overrightarrow{GC}+\dfrac{y}{y+1}\cdot\overrightarrow{GA}$ Analog, $\overrightarrow{GN}=\dfrac{1-y}{1+y}\cdot\overrightarrow{GC}-\dfrac{y}{1+y}\cdot\overrightarrow{GB}$. $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GN}$ coliniari $\Rightarrow \dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{y+1}{-y}=\dfrac{-x}{x+1}\cdot\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow x+y=1$.	3p
	Analog, $\overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{IB}+\dfrac{x}{x+1}\cdot\overrightarrow{IA}$ şi $4\cdot\overrightarrow{IA}+6\cdot\overrightarrow{IB}+3\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\dfrac{2-3\cdot x}{2\cdot(x+1)}\cdot\overrightarrow{IB}-\dfrac{3\cdot x}{4\cdot(x+1)}\cdot\overrightarrow{IC}$. $\overrightarrow{IN}=\dfrac{-3\cdot y}{2\cdot(y+1)}\cdot\overrightarrow{IB}+\dfrac{4-3\cdot y}{4\cdot(y+1)}\cdot\overrightarrow{IC}$. $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ coliniari $\Rightarrow\dfrac{2-3\cdot x}{2\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{2\cdot(y+1)}{-3\cdot y}=-\dfrac{3\cdot x}{4\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{4\cdot(y+1)}{4-3\cdot y}\Rightarrow$ $6\cdot x+3\cdot y=4$.	3p