Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Barem de corectare

Problema 1.
Existenţa unui şir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strict crescător şi nemărginit superior ... 4p
Divergenţa şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... 2p
Construcţia lui $n_1(\varepsilon)$ ... 2p
Convergenţa şirului $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ... 1p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 2.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}} = a$ ... 5p
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{b^3} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ... 3p
Nemărginirea lui g ... 1p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 3.
$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_nx_{n+1} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$ ... 3p
$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n - 2$ ... 4p
Inducţia matematică ... 2p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 4.
$A = 2011I_3 + B$ ... 4p
$B^3 = O_3$ ... 3p
$A^n = (2011I_3 + B)^n = 2011^nI_3 + n2011^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}2011^{n-2}B^2$ ... 2p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Soluţii

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la a, având toţi termenii diferiţi de a, şi fie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k(n)} = a$;

(b) pentru orice $y \in \mathbb{N}$ mulţimea $\{x \in \mathbb{N} | k(x) = y\}$ este finită (mulţimea vidă este finită, având *zero* elemente).

Soluţie. $(a) \Longrightarrow (b)$ Dacă pentru un $y_0 \in \mathbb{N}$ mulţimea $\{x \in \mathbb{N} | k(x) = y_0\}$ ar fi infinită, ea ar include un şir strict crescător şi nemărginit superior, notat cu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci, şirul $(a_{k(u_n)})_{n\in\mathbb{N}}$, unde $a_{k(u_n)} = a_{y_0} \neq a$, este un subşir constant al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În concluzie, acesta din urmă nu mai poate converge la a.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$. Mulţimile $(M_i)_{0\leq i\leq n(\varepsilon)}$, unde $M_i = \{x \in \mathbb{N} | k(x) = i\}$, fiind finite, există $n_1(\varepsilon)$ astfel încât $n \notin \bigcup\limits_{0\leq i\leq n(\varepsilon)} M_i$ pentru orice $n \geq n_1(\varepsilon)$. Aceasta ne conduce la $k(n) > n(\varepsilon)$ pentru orice $n \geq n_1(\varepsilon)$. Deci $|a_{k(n)} - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1(\varepsilon)$. ■

Problema 2. Fie a, $b > 0$ şi funcţiile f, $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^3$ şi

$$f\left(\frac{ax^2 + b}{\sqrt{1 + x^4}}\right) \cdot g(x) = x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Să se arate că funcţia g nu este mărginită.
Soluţie. Observăm că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}} = a$, de unde rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{b^3} \cdot \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Am obţinut că $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, deci g nu poate fi mărginită. ∎

Problema 3. Demonstraţi că toţi termenii şirului definit prin relaţiile

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 1 + 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1},\ n \geq 0,$$

sunt numere naturale.
Soluţie. Observăm că şirul este strict crescător. Ridicând la pătrat relaţia de recurenţă, obţinem

$$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0.$$

Din această relaţie scădem relaţia omoloagă obţinută prin înlocuirea $n \to n+1$ şi ajungem la

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n - 2, \qquad n \geq 1.$$

Cum $x_1 = 0$ şi $x_2 = 2$, concluzia rezultă prin inducţie matematică. ∎

Problema 4. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 2011 & 0 \\ -2012 & 0 & 2011 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}$.
Soluţie. Observăm că $A = 2011 \cdot I_3 + B$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 0 & 0 \\ -2012 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a+1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şi

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(a+1) & (a+1)^2 \\ 0 & -a^2 & -a(a+1) \end{pmatrix}, \qquad B^3 = O_3.$$

Astfel, $A^n = (2011 \cdot I_3 + B)^n = 2011^n \cdot I_3 + n \cdot 2011^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2011^{n-2} B^2$, unde $n \geq 2$. ∎

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la a, având toţi termenii diferiţi de a, şi fie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k(n)} = a$;

(b) pentru orice $y \in \mathbb{N}$ mulţimea $\{x \in \mathbb{N} | k(x) = y\}$ este finită (mulţimea vidă este finită, având *zero* elemente).

Problema 2. Fie $a, b > 0$ şi funcţiile $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^3$ şi

$$f\left(\frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}}\right)\cdot g(x) = x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Să se arate că funcţia g nu este mărginită.

Problema 3. Demonstraţi că toţi termenii şirului definit prin relaţiile

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 1 + 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1},\ n \geq 0,$$

sunt numere naturale.

Problema 4. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 2011 & 0 \\ -2012 & 0 & 2011 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}$.

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 (din oficiu) la 10.
3. Timp de lucru: 3 ore.